TU-Chemnitz, Fakultät für Mathematik **SS 2007**
Prof. Dr. P. Benner

Übung zur Vorlesung Lineare Algebra/Analytische Geometrie II

Übung 6: Jordansche Normalform / Lineare Differentialgeichungen

1. Fassen Sie zusammen: Welche Beziehungen gibt es zwischen Anzahl und Größe der einzelnen Blöcke in der Jordan'schen Normalform, den Vielfacheiten der Eigenwerte, den Eigenvektoren und Hauptvektorketten und dem Minimalpolynom?
Was bedeutet z.B.

$$d_k := \dim\left(\mathrm{Kern}((A-\lambda I)^k)\right) = m_k + d_{k-1}$$

für die Gestalt der Jordanschen Normalform?

2. Beweisen Sie folgende Aussagen für $A \in \mathbb{C}^{n,n}$:

(a) $\quad \mathrm{rang}\, A^{k+1} \leq \mathrm{rang}\, A^k$,

(b) $\quad \mathrm{rang}\, A^{k+1} = \mathrm{rang}\, A^k \quad \Rightarrow \quad \mathrm{rang}\, A^k = \mathrm{rang}\, A^j, \quad \forall\, j \geq k$,

(c) $\quad \lambda$ sei Eigenwert von A. Es gelte:
$\mathrm{rang}\,(A-\lambda I)^{k-1} > \mathrm{rang}\,(A-\lambda I)^k = \mathrm{rang}\,(A-\lambda I)^{k+1}$
$\Rightarrow \quad k$ ist die Dimension des größten Jordanblocks zum Eigenwert λ von A.

3. **Zur Erinnerung:** Ein Beispiel aus der Vorlesung mit einem Zwei-Massen-Schwinger führte auf die Differentialgleichungen (2. Ordnung)

$$\begin{array}{rcccccl} m_1\ddot{x}_1(t) & + & (k_1+k_2)x_1(t) & - & k_2x_2(t) & = & 0 \\ m_2\ddot{x}_2(t) & - & k_2x_1(t) & + & k_2x_2(t) & = & 0 \end{array}$$

Eine Lösung $\{x_1(t), x_2(t)\}$ ist von der Startposition ($t=0$) der Massen,

$$x_1(0) = x_1^{(0)},\ x_2(0) = x_2^{(0)},$$

aber auch von den Anfangsgeschwindigkeiten,

$$\dot{x}_1(0) = v_1^{(0)},\ \dot{x}_2(0) = v_2^{(0)},$$

abhängig.
Mit den Geschwindigkeiten als neue Variable erhält man:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{v}_1 \\ \dot{v}_2 \end{bmatrix}}_{y'} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k_1+k_2}{m_1} & \frac{k_2}{m_1} & 0 & 0 \\ \frac{k_2}{m_2} & -\frac{k_2}{m_2} & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}}_{y}, \quad y(0) = \underbrace{\begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ v_1^{(0)} \\ v_2^{(0)} \end{bmatrix}}_{y_0}$$

ein **lineares System** (gewöhnlicher) **Differentialgleichungen 1. Ordnung**

$$y'(t) = Ay(t) + f,\ t \in [0,a], \quad \text{mit der } \textbf{Anfangsbedingung} \quad y(0) = y_0.$$

Mit $f = 0$ (wie im Bsp.) heißt das System **homogen**, sonst **inhomogen**.
Zeigen Sie:

(a) Die Lösungsmenge $\mathcal{L}_A$ des homogenen Systems $y' = Ay$

$$\mathcal{L}_A := \{y : [0,a] \to \mathbb{C}^n \mid y' = Ay \text{ auf } [0,a]\}$$

ist ein Unterraum von $C^1([0,a];\mathbb{C}^n)$.

(b) Jede Lösung des inhomogenen Systems $y' = Ay + f$ hat die Form

$$y = y_p + y_h, \text{ wobei } y_p \text{ eine spezielle (partikuläre) Lösung ist und } y_h \in \mathcal{L}_A.$$

4. Geben Sie einen Lösungsweg für das lineare Differentialgleichungssystem $y' = Ay + f$, $(y(0) = y_0)$ an, wenn von $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ die Jordansche Normalform bekannt ist, d.h. $T^{-1}AT = J$ (bzw. $SAS^{-1} = J$ mit $S = T^{-1}$).

   Wenden Sie das Verfahren auf folgende Systeme an:

   (a)
$$\begin{aligned} \dot{y}_1(t) &= -5y_1(t) + 4y_2(t) + 2e^t, \\ \dot{y}_2(t) &= -2y_1(t) + y_2(t) + e^t, \end{aligned} \qquad y_1(0) = 1, y_2(0) = 1.$$

   (b)
$$\begin{aligned} \dot{y}_1(t) + 3y_1(t) + y_2(t) &= 2e^{-t}, \\ \dot{y}_2(t) - y_1(t) + y_2(t) &= -e^{-t}, \end{aligned} \qquad y_1(0) = 1, y_2(0) = -1.$$