TU-Chemnitz, Fakultät für Mathematik **SS 2007**
Prof. Dr. P. Benner

Übung zur Vorlesung Lineare Algebra/Analytische Geometrie II

Übung 5: Trigonalisierung, Hauptvektoren

1. Beweisen Sie das folgende Lemma:

   Jeder Endomorphismus $\mathcal{A}$ eines reellen Vektorraumes V mit $\dim V \geq 1$ hat einen invarianten Unterraum W mit $1 \leq \dim W \leq 2$.

2. Beweisen Sie folgenden Satz:

   Ist $\mathcal{A}$ Endomorphismus eines reellen Vektorraumes V, so gibt es eine Basis B derart, dass

$$M_B(\mathcal{A}) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & * & \\ & & \lambda_r & & & \\ & & & \boxed{B_1} & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & \boxed{B_m} \end{bmatrix}, \quad \begin{array}{l} \text{mit } \lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{R}, \\ B_i = \begin{bmatrix} 0 & -c_i \\ 1 & -b_i \end{bmatrix} \\ \\ \text{und } b_i^2 - 4c_i < 0, \\ \text{für } i = 1, \ldots, m. \end{array}$$

   Hinweis: Beweisidee vgl. Satz X.34 (Trigonalisierungssatz) und Lemma aus Aufgabe 1.

3. Trigonalisieren Sie folgende Matrizen:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & -3 & -4 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & -5 \end{bmatrix}.$$

4. Bestimmen Sie zu folgender Matrix A die Eigenwerte und deren Vielfachheiten, sowie die Eigen- und Hauptvektorunterräume zu allen Eigenwerten.

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 5 & -1 & 4 \\ 5 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

5. Zeigen Sie für $A, B \in K^{n,n}$: Aus $A \sim B$ folgt $A^k \sim B^k$.