TU-Chemnitz, Fakultät für Mathematik **SS 2007**
Prof. Dr. P. Benner

Übung zur Vorlesung Lineare Algebra/Analytische Geometrie II

Übung 4: Eigenwerte und Eigenvektoren von Matrizen und Abbildungen

1. Bestimmen Sie alle Eigenwerte und Eigenvektoren (bzw. Eigenräume) von
$$A = xx^\top + yy^\top \text{ für } x, y \in \mathbb{R}^n,\ x^\top y = 0,\ x \neq 0,\ y \neq 0.$$

2. Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n} \subset \mathbb{C}^{n\times n}$. Zeigen Sie: Wenn λ_1 ein Eigenwert von A ist, so ist auch $\bar{\lambda}_1$ Eigenwert von A. Was gilt für den zugehörigen Eigenvektor (Eigenraum)?

3. (a) Gegeben seien $a \in \mathbb{R}^3$ und $A \in \mathbb{R}^{3,3}$, wobei A **nicht** den Eigenwert 1 besitzt. Man bestimme die Menge aller Geraden in $\mathbb{R}^3$, die durch die affin lineare Abbildung
$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \qquad f(x) = Ax + a$$
(nicht notwendig punktweise) auf sich abgebildet werden.

   (b) Wenden Sie Aufgabe (a) auf das Beispiel an:
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ -1 & -3 & -3.5 \end{bmatrix}, \quad a = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

4. Bestimmen Sie aus der geometrischen Anschauung die reellen Eigenwerte und Eigenvektoren der Endomorphismen $F_i(\alpha) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ $(\alpha \in \mathbb{R})$ mit den Matrixdarstellungen
$$A_1(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}, \qquad A_2(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{bmatrix}.$$