TU-Chemnitz, Fakultät für Mathematik **SS 2007**
Prof. Dr. P. Benner

Übung zur Vorlesung Lineare Algebra/Analytische Geometrie II

Übung 2 : Äquivalenzrelationen, Quotientenräume

1. Sei $\mathcal{L}[a,b] := \{f : [a,b] \to \mathbb{R} \mid f$ „integrierbar“$\}$ und
$$\mathcal{N} := \{f \in \mathcal{L}[a,b] \mid \int_a^b |f(x)|dx = 0\} \subset \mathcal{L}[a,b].$$
Zeigen Sie, dass für $f, g \in \mathcal{N}$ die Relation
$$f \sim g \quad \Leftrightarrow \quad g - f \in \mathcal{N}$$
eine Äquivalenzrelation ist.

2. Überprüfen Sie, welche der folgenden Relationen jeweils auf der Menge X Äquivalenzrelationen sind:
   (a) $X = \mathbb{N}$, $(m,n) \in R_1 :\Leftrightarrow\ m/n$ (m teilt n)
   (b) $X = \mathbb{R}$, $(x,y) \in R_2 :\Leftrightarrow\ e^x = e^y$
   (c) $X = \mathbb{R}$, $(x,y) \in R_3 :\Leftrightarrow\ x^2 = y^2$
   (d) X beliebiges Mengensystem, $(a,b) \in R_4 :\Leftrightarrow\ a$ ist echte Teilmenge von b
   (e) X = Menge aller Geraden im $\mathbb{R}^2$, $(g,h) \in R_5 :\Leftrightarrow\ g \| h$
   (f) X = Menge aller Geraden im $\mathbb{R}^3$, $(g,h) \in R_6 :\Leftrightarrow g \perp h$

3. Beweisen Sie Teile <u>(a-c)</u> des Satzes (IX.18) :
Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $U \subset V$ ein Unterraum.
   (a) Ist $\{v_1, \ldots, v_s\}$ eine Basis von V, so ist $\{v_1+U, \ldots, v_s+U\}$ ein Erzeugendensystem von V/U.
   (b) $V = U + \operatorname{span}\{v_1, \ldots, v_t\} \Rightarrow V/U = \operatorname{span}\{v_1 + U, \ldots, v_t + U\}$
   (c) $v_1, \ldots, v_s \in V$ und $v_1+U, \ldots, v_s+U$ linear unabhängig in V/U, dann sind $v_1, \ldots, v_s$ lin. unabhängig in V.
   (d) $v_1, \ldots, v_s \in V$ und $v_1 + U, \ldots, v_s + U$ linear unabhängig in V/U, dann gilt:
   $u_1, \ldots, u_r$ linear unabhängig in $U \Rightarrow u_1, \ldots, u_r, v_1, \ldots, v_s$ lin. unabhängig in V.
   (e) Sei $\{u_1, \ldots, u_r\}$ eine Basis von U, $v_1, \ldots, v_s \in V$, dann gilt
   $\{u_1, \ldots, u_r, v_1, \ldots, v_s\}$ ist Basis von $V \Leftrightarrow \{v_1 + U, \ldots, v_s + U\}$ ist Basis von V/U.

4. Sei $V = \mathbb{R}^2$ und $U = \{v = (x,y) \in V \mid y = 0\}$
   (a) Geben Sie den Quotientenraum von V modulo U an. Beschreiben Sie die Elemente von V/U geometrisch.
   (b) Welche Beziehung muss zwischen $v_1, v_2 \in V$ gelten, wenn $v_1 + U = v_2 + U$?
   (c) Wiederholen Sie die Aufgaben a) und b) für $U = \{v = (x,y) \in V \mid y = 2x\}$

5. (Wiederholung zu Polynomen)
   Def.: Ein Polynom mit Koeffizienten in einem Körper $\mathbb{K}$ (Polynom über $\mathbb{K}$) ist ein formaler Ausdruck

$$p(t) = a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n = \sum_{k=0}^{n} a_k t^k \in \mathbb{K}[t]$$

   mit Koeffizienten $a_k \in \mathbb{K}$, wobei t einfach nur eine *Unbestimmte* ist (ein Buchstabe, für den man alles einsetzen darf, was sinnvoll ist).

   (a) Finden Sie „sinnvolle“ Beispiele für den formalen Parameter t. Welche Eigenschaften muss die Menge M besitzen, aus der t gewählt wird?

   (b) Welche algebraische Struktur besitzt $\mathbb{K}[t]$? Was kann man über den Grad der Polynome bei der Verknüpfung $p + q$ und $p \cdot q$ aussagen?

6. (a) Beweisen Sie den folgenden Satz: Sind $f, g \in \mathbb{K}[t]$ und ist $g \neq 0$, so gibt es dazu eindeutig bestimmte Polynome $q, r \in \mathbb{K}[t]$ derart, dass

$$f = q \cdot g + r \qquad \text{und} \qquad \deg r < \deg g$$

   (b) Berechnen Sie q und r für $f = 3t^3 + 2t + 1, \quad g = t^2 - 4t$.

   (c) Zeigen Sie: Ist $\lambda \in \mathbb{K}$ eine Nullstelle ($f(\lambda) = 0$) des Polynoms $f \in \mathbb{K}[t]$, so gibt es ein eindeutig bestimmtes Polynom $g \in \mathbb{K}[t]$ mit

$$f = (t - \lambda) g \qquad \text{und } \deg g = \deg f - 1.$$

7. Der $ggT(a, b)$ für $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $a \neq 0$ oder $b \neq 0$ wird für gewöhnlich als Maximum der Menge aller Teiler von a und b definiert, also

$$\begin{aligned} T_{ab} &:= \{z \in \mathbb{Z} : z|a \text{ und } z|b\} \\ ggT(a, b) &:= max\ T_{ab} \end{aligned}$$

   (a) Warum ist die Bedingung

$$a \neq 0 \quad \text{oder} \quad b \neq 0$$

   in der Definition nötig ?

   (b) Für die Bestimmung von $max\ T_{ab}$ braucht man die Eigenschaft, dass die Menge $\mathbb{Z}$ geordnet ist.

   Für Polynome lassen sich auch Teiler und Vielfache definieren, aber Polynome kann man nicht ordnen.

   Wie kann man in diesem Fall den ggT definieren, ohne eine Ordnung zu haben ?

8. Der ggT ganzer Zahlen wird bekanntlich nach dem Euklidischen Algorithmus durch fortlaufende Division mit Rest bestimmt. Wenden Sie diese Methode zur Bestimmung des ggT folgender Polynome an:

$$\begin{aligned} p(t) &= t^4 + t^3 - 2t^2 + 3t - 1 \\ q(t) &= t^4 - t^3 + t - 1 \end{aligned}$$