TU-Chemnitz, Fakultät für Mathematik **SS 2007**
Prof. Dr. P. Benner

Übung zur Vorlesung Lineare Algebra/Analytische Geometrie II

Übung 1: Lineare Abbildungen, Matrixdarstellung

1. Welche der folgenden Abbildungen sind linear? Geben Sie jeweils die Matrixdarstellung (bzgl. der kanonischen Basen) sowie Kern und Bild der linearen Abbildungen an.

   (a) $T_1 : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4, \quad T_1(x) = (x_1, x_4, x_3, x_2)^\top$,

   (b) $T_2 : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4, \quad T_2(x) = (x_1, x_2, x_3, x_4 + 3x_2)^\top$,

   (c) $T_3 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^4, \quad T_3(z) = ((1+i)z, (1+i)^2 z, (1+i)^3 z, (1+i)^4 z)^\top$,

   (d) $T_4 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^4, \quad T_4(z) = ((1+i)z, (1+i)z^2, (1+i)z^3, (1+i)z^4)^\top$,

   (e) $T_5 : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}, \quad T_5(u) = \langle u^0, u \rangle$ bei gegebenem $u^0 \in \mathbb{C}^n$,

   (f) $T_6 : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}, \quad T_6(u) = \langle u, u^0 \rangle$ bei gegebenem $u^0 \in \mathbb{C}^n$,

   (g) $T_7 : \mathcal{P}_n \to \mathcal{P}_n, \quad T_7(p)(t) = p(t+1)$,

   (h) $T_8 : \mathcal{P}_n \to \mathcal{P}_m, \quad T_8(p)(t) = (p+q)'(t)$ bei gegebenem $q \in \mathcal{P}_k$, mit $m = \max(n,k) - 1$,

   (i) $T_9 : \mathcal{P}_n \to \mathcal{P}_{n+k-1}, \quad T_9(p)(t) = (p \cdot q)'(t)$ bei gegebenem $q \in \mathcal{P}_k$,

2. Man bestimme eine Drehungsmatrix $A \in \mathbb{R}^{2,2}$, durch die der Punkt P mit den euklidischen Koordinaten $(1,1)$ auf einen Punkt $P' = (0, y)$ der Koordinatenachse e_2 abgebildet wird (der Wert von y ist zu bestimmen), sowie eine Spiegelungsmatrix S, die den Punkt P auf denselben Punkt P' abbildet.

3. Sei $\mathcal{B} = \{\sin, \cos, \sin\cdot\cos, \sin^2, \cos^2\}$ und $V = \operatorname{span}\mathcal{B} \subset A(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Betrachten Sie den Endomorphismus $F \in \operatorname{End}(V)$ mit $F(f) = f'$, wobei f' die erste Ableitung von $f \in V$ bezeichnet.

   (a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{B}$ eine Basis von V ist.

   (b) Bestimmen Sie die Matrixdarstellung von F bzgl. der Basis $\mathcal{B}$.

   (c) Bestimmen Sie Basen von $\operatorname{Kern}(F)$ und $\operatorname{Bild}(F)$.

4. Es sei $T : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^4$ die lineare Abbildung, für die gilt:

$$T(e_1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \; T(e_2) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \; T(e_3) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

   Man bestimme die Matrix $\mathbf{T}$, die diese Abbildung bezüglich der Basen

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \; v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \; v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \text{von } \mathbb{R}^3$$

   und

$$w_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \; w_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \; w_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \; w_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \text{von } \mathbb{R}^4$$

   beschreibt.

5. Zeigen Sie, dass die Menge der quadratischen Matrizen mit den Matrizenoperationen $+$ und $\cdot$ eine *Algebra* bildet.