TU-Chemnitz, Fakultät für Mathematik **SS 2007**
Prof. Dr. P. Benner

Lineare Algebra/Analytische Geometrie II
7. Hausaufgabe, Abgabe: 29.05.2007

1. Man zeige: Wenn die Matrizen $A,\ B\ \in R^{n\times n}$ vertauschbar sind $(AB = BA)$, so gilt
$$(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k}.$$
(4 P.)

2. Gegeben seien drei Endomorphismen in $\mathbb{R}^3$ durch ihre Matrixdarstellungen (bzgl. der kanonischen Basis):
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 6 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 4 \\ 2 & -2 & -3 \\ -3 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$
Berechnen Sie zu diesen Matrizen die jeweilige Hauptvektorbasis in $\mathbb{R}^3$ und geben Sie die Matrixdarstellungen der Endomorphismen bzgl. der jeweils zugehörigen Hauptvektorbasis an. (12 P.)

3. Gegeben sei eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ mit den Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ und deren algebraischen Vielfachheiten $\mu(\lambda_j),\ j = 1, \ldots, k$. Zeigen Sie

   (a) $\sum_{j=1}^{k} \mu(\lambda_j) \cdot \lambda_j = \mathrm{tr}(A)$

   (b) $\prod_{j=1}^{k} \lambda_j^{\mu(\lambda_j)} = \det(A)$,

   (6 P.)

   Hinweis: Betrachten Sie das charakteristische Polynom bzw. dessen Koeffizienten (als $\sum \ldots$ bzw. $\det(\ldots)$).