Lineare Algebra/Analytische Geometrie II

5. Hausaufgabe, Abgabe: 14./15.05.2007

1. (a) Es sei $A \in \mathbb{R}^{n,n} \subset \mathbb{C}^{n,n}$ orthogonal. Zeigen Sie, dass mit λ auch stets λ^{-1} ein Eigenwert von A ist.

   (b) Gilt diese Aussage auch für unitäre Matrizen?

   (c) Verifizieren Sie die Aussage (a) am Beispiel der Matrix $A = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$. (6 P.)

2. Man bestimme (falls möglich) eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{3,3}$, die die Eigenwerte $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$ und $\lambda_3 = -1$ und die zugehörigen Eigenvektoren

$$x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad x_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad x_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

   bzw.

$$y_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad y_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad y_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

   besitzt. (6 P.)

3. Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $V = \mathcal{D}(I, \mathbb{R})$ der unendlichdimensionale $\mathbb{R}$-Vektorraum der auf I beliebig oft differenzierbaren Funktionen. Bestimmen Sie alle reellen Eigenwerte mit zugehörigen Eigenvektoren für den Endomorphismus, der jeder Funktion $\varphi(x)$ ihre Ableitung $\varphi'(x)$ zuordnet.

$$F: \ V \to V, \quad \varphi \mapsto \varphi'.$$

   (6 P.)