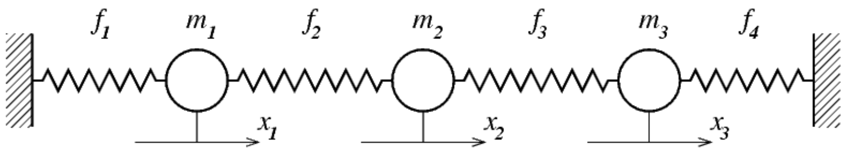
TU-Chemnitz, Fakultät für Mathematik **SS 2007**
Prof. Dr. P. Benner

Lineare Algebra/Analytische Geometrie II
4. Hausaufgabe, Abgabe: 07./08.05.2007

1. Berechnen Sie für den folgenden Federschwinger die Eigenschwingungen, d.h. die Frequenzen ω_i und die Schwingformen $x^{(i)}(t) = \left[x_1^{(i)}(t), x_2^{(i)}(t), x_3^{(i)}(t)\right]^\top$,



wobei für jede Masse m_i die Bewegungsgleichung gilt:

$$m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = -f_i(x_i - x_{i-1}) + f_{i+1}(x_{i+1} - x_i), \quad i = 1, 2, 3, \ (x_0 = x_4 = 0)$$

Stellen Sie die Matrix für das Eigenwertproblem mit dem Ansatz $x_i(t) = y_i \cos \omega t$ allgemein auf und verwenden Sie dann zur Berechnung die Federkonstanten bzw. Massen

$$f_1 = f_4 = 2, \quad f_2 = f_3 = 1, \qquad m_1 = m_2 = m_3 = 1.$$

(8 P.)

2. Bestimmen Sie alle Eigenwerte und Eigenvektoren (bzw. Eigenräume) der folgenden Matrizen und geben Sie die Vielfachheiten der Eigenwerte an.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$B = xy^\top \quad \text{für} \quad x, y \in \mathbb{R}^n, \ x \neq 0.$$

(8 P.)

3. Sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ unitär. Zeigen Sie, dass alle Eigenwerte von A den Betrag 1 besitzen. (3 P.)