TU-Chemnitz, Fakultät für Mathematik **SS 2007**
Prof. Dr. P. Benner

Lineare Algebra/Analytische Geometrie II
3. Hausaufgabe, Abgabe: 30.4.2007

1. Bestimmen Sie (durch Division mit Rest) die Polynome $q(t)$ und $r(t)$, so dass $p(t) = q(t) \cdot g(t) + r(t)$ mit $\deg r < \deg g$. (3 P.)

$$p(t) = t^4 + 3t^3 + 2t^2 + 2t - 4, \qquad g(t) = t^2 + t + 1$$

2. Gegeben seien die folgenden Matrizen

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{3}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} -k_1 & 0 & 0 \\ 2k_1 & -k_2 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \end{bmatrix}, \quad k_1, k_2 > 0.$$

Berechnen Sie jeweils die Eigenwerte mit Hilfe des charakteristischen Polynoms, sowie die zugehörigen Eigenvektoren. (6 P.)

Zusatz: Überprüfen Sie Ihre Lösungen mit Hilfe von Matlab ($\rightarrow$ `help eig`); im Falle von B mit einigen speziellen Werten für k_1, k_2.

3. Sei A eine reguläre $n \times n$-Matrix, f das charakteristische Polynom. Wir definieren ein Polynom

$$g(t) = (-t)^n \frac{1}{\det A} f\left(t^{-1}\right)$$

Man zeige, dass
a) $g(A^{-1}) = 0$.
b) $g(t)$ charakteristisches Polynom von A^{-1} ist. (4 P.)

---

4. **Zusatz:** (sollte jeder lösen, muss aber nicht abgegeben werden)

Berechnen Sie **numerisch** (auf dem Computer mittels Matlab) die Eigenwerte von Diagonalmatrizen

$$A = \operatorname{diag}(1, 2, \ldots, n) \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

als Nullstellen des charakteristischen Polynoms. Stellen Sie die Eigenwerte graphisch als Punkte in der komplexen Ebene dar. Wiederholen Sie die Berechnung für $n = 5, 10, 15, 20, 25, \ldots$.

Hinweise zu dafür nützlichen Matlab-Befehlen:

- `A=diag(1:n)` erzeugt eine Diagonalmatrix mit $a_{kk} = k$;
- `p=poly(A)` berechnet das charakteristische Polynom;
- `w=roots(p)` berechnet die Nullstellen des Polynoms;
- `plot(real(1:n),imag(1:n),'bo',real(w),imag(w),'rx')`
  stellt die Zahlen $1, \ldots, n$ als blaues **`o`** und die Elemente von `w` als rotes **`x`** dar.

Weitere Möglichkeiten zur „Verschönerung" der Darstellung lassen sich mittels `help` herausfinden, z. B. `help plot`.