Selbstadjungierte Endomorphismen/symmetrische Matrizen

Hier: V sei endlich-dimensionaler $\mathbb{R}$- oder $\mathbb{C}$-Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle\, .\, ,\, .\, \rangle$, d.h. wir betrachten Abbildungen auf Euklidischen oder unitären Vektorräumen.

adjungierter Endomorphismus:

Zu $f \in \mathrm{End}(V)$ existiert genau ein $f^{ad} \in \mathrm{End}(V)$ mit

$$\langle\, f^{ad}(v)\, ,\, w\, \rangle = \langle\, v\, ,\, f(w)\, \rangle \quad \forall\, v, w \in V.$$

f^{ad} ist der zu f **adjungierte Endomorphismus**.

selbstadjungiert:

$f \in \mathrm{End}(V)$ heißt **selbstadjungiert**, falls

$$\langle\, f(v)\, ,\, w\, \rangle = \langle\, v\, ,\, f(w)\, \rangle \quad \forall\, v, w \in V.$$

$f \in \mathrm{End}(V)$ selbstadjungiert $\Longleftrightarrow$
die Matrixdarstellungen F von f bzgl. ONB sind symmetrisch (Hermitesch), d.h. $F = F^T$ ($F = F^H$).

Diagonalisierbarkeit:

Symmetrische (Hermitesche) Matrizen A sind orthogonal (unitär) diagonalisierbar und alle Eigenwerte sind reell, d.h. $\Lambda(A) \subset \mathbb{R}$ (auch für $A = A^H \in \mathbb{C}^{n\times n}$!).

Folgerung: Selbstadjungierte Endomorphismen sind diagonalisierbar.