Bilinear- und Sesquilinearformen

Definition: Sei $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ und V $\mathbb{K}$-Vektorraum.

a) Eine Abbildung

$$\varphi : V \times V \to \mathbb{K}$$

heißt **Bilinearform**, falls $\forall w \in V$ die Abbildung

$$\varphi_w : V \to \mathbb{K} : v \to \varphi(v, w)$$

und $\forall v \in V$ die Abbildung

$$\varphi_v : V \to \mathbb{K} : w \to \varphi(v, w)$$

linear sind, also $\varphi_v, \varphi_w \in \mathrm{Hom}(V, \mathbb{K})$ $\forall v, w \in V$.

Anders ausgedrückt: Es gelten die Axiome

(B1) $\varphi(v_1 + v_2, w) = \varphi(v_1, w) + \varphi(v_2, w) \quad \forall v_1, v_2, w \in V$,

(B2) $\varphi(\alpha v, w) = \alpha\varphi(v, w) \quad \forall\, v, w \in V, \forall\, \alpha \in \mathbb{K}$,

(B3) $\varphi(v, w_1 + w_2) = \varphi(v, w_1) + \varphi(v, w_2) \quad \forall v, w_1, w_2 \in V$,

(B4) $\varphi(v, \beta w) = \beta\varphi(v, w) \quad \forall\, v, w \in V, \forall\, \beta \in \mathbb{K}$.

b) Eine Bilinearform (BF) heißt **symmetrisch**, falls gilt:

(B5) $\varphi(v, w) = \varphi(w, v) \quad \forall v, w \in V$.

c) Eine Abbildung

$$\varphi : V \times V \to \mathbb{C}$$

heißt **Sesquilinearform**, falls **(B1)–(B3)** sowie

(B4)' $\varphi(v, \beta w) = \overline{\beta}\varphi(v, w) \quad \forall\, v, w \in V, \forall\, \beta \in \mathbb{K}$

gelten.

d) Eine Sesquilinearform heißt **Hermitesche Form (HF)**, falls noch

(B6) $\varphi(v, w) = \overline{\varphi(w, v)} \quad \forall v, w \in V$

erfüllt ist.

(Beachte: Die Definition einer HF benötigt eigentlich nur **(B1)**, **(B2)** und **(B6)**.)