Treppennormalform/Gaußsches Eliminationsverfahren

Satz IV.4. *Sei $\mathbb{K}$ Körper, $A \in \mathbb{K}^{n\times m}$. Dann existieren Elementarmatrizen $S_1, \ldots, S_t$, so daß*

$$S_t \cdot S_{t-1} \cdots S_1 A = R$$

*in **Treppennormalform** ist, d.h.*

$$R = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{c|cc|cc|cc|c|cc} & 1 & * & 0 & * & 0 & \vdots & & 0 & \\ \cline{2-3} \vdots & & & 1 & * & 0 & * & & \vdots & \vdots \\ \cline{4-5} 0 & & & & & 1 & \vdots & & \vdots & * \\ \cline{6-7} \vdots & & & & & & & \ldots\ldots & 0 & \vdots \\ & & & & & & & & 1 & \\ \cline{9-10} & & & & & & & & & \end{array}\right] r \\ \begin{array}{cccccc} m_0 & m_1 & m_2 & m_3 & \ldots & m_r \end{array} \end{array}, \tag{IV.4}$$

wobei $\sum_{k=0}^{r} m_k = m$.

Der Beweis erfolgt konstruktiv mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren basierend auf den Elementarmatrizen

- $P_{ij} = I_n - (e_i e_i^T + e_j e_j^T) + (e_i e_j^T + e_j e_i^T)$ **(Permutationsmatrizen)** zum Vertauschen der Zeilen i und j;
- $M_i(\mu) = I_n + (\mu - 1)e_i e_i^T$ zur Multiplikation der i-ten Zeile mit μ;
- $G_{ij}(\mu) = I_n + te_j e_i^T$ **(Gaußsche Eliminationsmatrizen)** zur Addition des μ-fachen der i-ten Zeile zur j-ten Zeile;
- $F_i = \prod_{k=i+1}^{n} G_{ik}(\mu_k)$ **(Frobeniusmatrizen)** zum Ausräumen einer Spalte.