Merkblatt: Komplexe Zahlen

Definition:

$$\mathbb{C} = \{z \mid z = x + iy,\ x, y \in \mathbb{R},\ i^2 = -1\},$$

wobei $i = \sqrt{-1}$ die imaginäre Einheit bezeichnet.
$\mathrm{Re}(z) = x$ ist der Realteil, $\mathrm{Im}(z)$ der Imaginärteil der komplexen Zahl z.

Rechenregeln:

$$\begin{aligned}
z_1 \pm z_2 &= (x_1 + iy_1) \pm (x_2 + iy_2) = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2) \\
z_1 \cdot z_2 &= (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1x_2 + i^2 y_1y_2 + i(x_1y_2 + x_2y_1) \\
&= \underbrace{x_1x_2 - y_1y_2}_{=\mathrm{Re}(z_1z_2)} + i\,\underbrace{(x_1y_2 + x_2y_1)}_{=\mathrm{Im}(z_1z_2)} \\
\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} &= \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{\underbrace{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)}_{=x_2^2 + y_2^2}} = \underbrace{\frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}}_{=\mathrm{Re}(z_1/z_2)} + i\,\underbrace{\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}}_{=\mathrm{Im}(z_1/z_2)} \\
&= \frac{z_1\overline{z_2}}{z_2\overline{z_2}} = \frac{z_1\overline{z_2}}{|z_2|^2},
\end{aligned}$$

wobei $\overline{z}$ die zu $z \in \mathbb{C}$ konjugiert komplexe Zahl ist und $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ den Betrag von z bezeichnet.

Regeln für komplexe Konjugation und Betrag:
Seien $z = x + iy, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Dann gelten folgende Aussagen:

a) Regeln für die komplexe Konjugation:

(i) $z + \overline{z} = 2\mathrm{Re}(z) = 2x, \quad z - \overline{z} = 2i\,\mathrm{Im}(z) = 2iy$

(ii) $\overline{\overline{z}} = z$

(iii) $z \cdot \overline{z} = |z|^2$

(iv) $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$

(v) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}, \quad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$

b) Regeln für den Betrag:

(i) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

(ii) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ (Dreiecksungleichung)

(iii) $|z_1 - z_2| \geq ||z_1| - |z_2||$