Kapitel XIV

Quadriken

Wir wollen nun einen Bezug zur Geometrie herstellen und damit die Klassifikation von geometrischen Objekten im $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ vornehmen. Sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Ein quadratisches Polynom in n Variablen ist ein Ausdruck der Form

$$P(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} a_{ij} x_i x_j + \sum_{1 \leq i \leq n} b_i x_i + c, \tag{XIV.1}$$

in dem nicht alle a_{ij} verschwinden. P ist eine <u>nichtlineare</u> Abbildung

$$P : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}.$$

Definition XIV.2 *Eine Teilmenge $Q \subset \mathbb{K}^n$ heißt* <u>Quadrik</u> *oder* <u>Hyperfläche zweiter Ordnung</u>*, falls es ein quadratisches Polynom gibt, so dass*

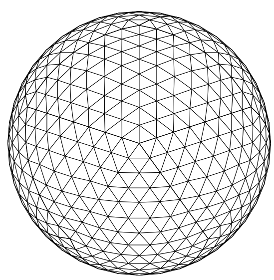
$$Q = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^n \;\middle|\; P(x_1, \ldots, x_n) = 0 \right\}.$$

Beispiel XIV.3

a) $\mathbb{K} = \mathbb{R},\ n = 3$

$$P(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1,$$

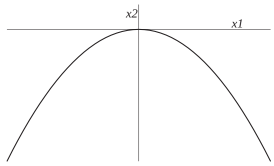
$$Q = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1 = 0 \right\}$$



ist gerade die Oberfläche einer Kugel mit Mittelpunkt $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ und Radius 1.

b) $\mathbb{K} = \mathbb{R},\ n = 2$

$$P(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_2$$
$$Q = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + 2x_2 = 0 \right\}$$

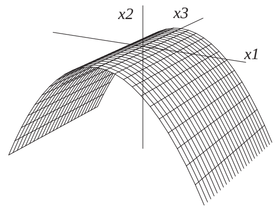


Parabel

c) $\mathbb{K} = \mathbb{R},\ n = 3$

$$P(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2$$

$$Q = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + 2x_2 = 0 \right\}$$



Parabelzylinder

Im folgenden betrachten wir nur Körper, in denen $1 + 1 \neq 0$ ist.
Sei $P(x_1, \ldots, x_n)$ quadratisches Polynom wie in (XIV.1). Wir wollen nun alle Quadriken mit Hilfe von Matrizen beschreiben. Dazu konstruieren wir aus $A = [a_{ij}] \in \mathbb{K}^{n,n}, b \in \mathbb{K}^n, c \in \mathbb{K}$ die folgende Matrix

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} c & \frac{b_1}{2} & \frac{b_2}{2} & \cdots & \frac{b_n}{2} \\ \frac{b_1}{2} & a_{11} & \frac{a_{12}}{2} & \cdots & \frac{a_{1n}}{2} \\ \frac{b_2}{2} & \frac{a_{12}}{2} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \frac{a_{n-1,n}}{2} \\ \frac{b_n}{2} & \frac{a_{1n}}{2} & \cdots & \frac{a_{n-1,n}}{2} & a_{nn} \end{bmatrix} = [\hat{a}_{ij}]. \tag{XIV.4}$$

$\hat{A}$ ist symmetrisch und enthält alle Koeffizienten des Polynoms. Weiter gilt

$$x \in Q \quad \Longleftrightarrow \quad \hat{x}^\top \hat{A} \hat{x} = 0 \quad \text{für } \hat{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Durch diese Erweiterung gehören also zu den Punkten aus Q diejenigen erweiterten Vektoren, für die die über $\hat{A}$ definierte Bilinearform

$$\hat{\alpha} : \mathbb{K}^{n+1} \times \mathbb{K}^{n+1} \to \mathbb{K}$$

ergibt $\hat{\alpha}(\hat{x}, \hat{x}) = \hat{x}^\top \hat{A} \hat{x} = 0$.

Wir wollen nun spezielle Abbildungen betrachten, die Abstände erhalten.

Sei V ein endlichdimensionaler euklidischer Vektorraum mit einer Abstandsfunktion

$$d(v, w) = \|v - w\| \ .$$

Eine Abbildung $f : V \to V$, für die gilt $d(v, w) = d(f(v), f(w)) \quad \forall v, w \in V$ heißt *abstandserhaltend* (wird manchmal auch *Kongruenzabbildung* genannt). (Erinnere: Orthogonale bzw. unitäre Endomorphismen erhalten die induzierte Norm und sind somit Kongruenzabbildungen!)

Betrachte nun die Abbildung

$$\begin{aligned} g:\ & V \to V \\ & v \mapsto g(v) = f(v) - f(0)\,. \end{aligned}$$

Es gilt natürlich, dass g wieder abstandserhaltend ist und $g(0) = 0$.

Also folgt aus Lemma (XII.3), dass g ein orthogonaler Endomorphismus ist. Es gibt also zu jeder abstandserhaltenden Funktion $f : V \to V$ einen orthogonalen Endomorphismus g, so dass

$$f(v) = a + g(v) \quad \forall v \in V, \qquad (a = f(0)).$$

Umgekehrt gilt natürlich sofort, dass alle Abbildungen $v \mapsto a + g(v)$, mit $a \in V$ und g orthogonal, abstandserhaltend sind.

Was ist die Matrixdarstellung von f bzw. g?
Von g ist das natürlich eine orthogonale Matrix und von f eine Matrix der Form

$$\hat{G} = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline a_1 & & & \\ \vdots & & G & \\ a_n & & & \end{array}\right] \tag{XIV.5}$$

wobei G die (orthogonale) Matrixdarstellung von g ist und $a = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$.

Lemma XIV.6 *Ist Q eine Quadrik in $\mathbb{R}^n$, beschrieben durch die Matrix $\hat{A}$ und $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine abstandserhaltende Abbildung mit der Matrixdarstellung*

$$\hat{G} = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline a_1 & & & \\ \vdots & & G & \\ a_n & & & \end{array}\right],$$

so ist $f(Q)$ eine Quadrik, beschrieben durch die Matrix

$$\hat{G}^{-\top}\hat{A}\hat{G}^{-1} \qquad (\hat{G}^{-\top} \equiv (\hat{G}^{-1})^{\top}). \tag{XIV.7}$$

Wir sehen, dass dies eine (spezielle) Kongruenztransformation mit $\hat{G}^{-1}$ ist.

Beweis: Sei $y = f(x)$, $\hat{y} = \hat{G}\hat{x}$ mit

$$\hat{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, \hat{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \Longrightarrow \hat{x} = \hat{G}^{-1}\hat{y}.$$

(Aus $G \in \mathcal{O}(n)$ folgt, dass $\hat{G}$ invertierbar ist.)

$$y \in f(Q) \iff x \in Q \iff \hat{x}^\top \hat{A} \hat{x} = 0 \iff \hat{y}^\top \hat{G}^{-\top} \hat{A} \hat{G}^{-1} \hat{y} = 0\,.$$

Also wird $f(Q)$ gerade durch die Matrix $\hat{G}^{-\top}\hat{A}\hat{G}^{-1}$ beschrieben und ist damit eine Quadrik, denn $\hat{G}^{-1}$ hat die gleiche Form wie $\hat{G}$. □

Wir wollen noch einmal anschauen, was

$$\hat{y}^\top \hat{G}^{-\top} \hat{A} \hat{G}^{-1} \hat{y} = 0 \tag{XIV.8}$$

ist:

$$\hat{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ y \end{bmatrix}, \quad \hat{G} = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline a_1 & & & \\ \vdots & & G & \\ a_n & & & \end{array}\right] =: \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a & G \end{bmatrix}, \quad \hat{G}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -G^{-1}a & G^{-1} \end{bmatrix},$$

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} c & \frac{b_1}{2} & \cdots & \frac{b_n}{2} \\ \frac{b_1}{2} & a_{11} & & \frac{a_{1n}}{2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{b_n}{2} & \frac{a_{n1}}{2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} =: \begin{bmatrix} c & \frac{1}{2}b^\top \\ \frac{1}{2}b & \tilde{A} \end{bmatrix}$$

$$\hat{G}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -G^{-1}a + G^{-1}y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ G^{-1}(y-a) \end{bmatrix}$$

$$\hat{y}^\top \hat{G}^{-\top} \hat{A} \hat{G}^{-1} \hat{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ G^{-1}(y-a) \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} c & \frac{1}{2}b^\top \\ \frac{1}{2}b & \tilde{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ G^{-1}(y-a) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ G^{-1}(y-a) \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} c + \frac{1}{2}b^\top G^{-1}(y-a) \\ \frac{1}{2}b + \tilde{A}G^{-1}(y-a) \end{bmatrix}$$

$$= c + \frac{1}{2}b^\top (G^{-1}(y-a)) + (G^{-1}(y-a))^\top \cdot \frac{1}{2}b + (G^{-1}(y-a))^\top \tilde{A} (G^{-1}(y-a))$$

$$= c + \left(\frac{(y-a)}{2}^\top G^{-\top} b \right) + \left(\frac{(y-a)}{2}^\top G^{-\top} b \right)^\top + (y-a)^\top (G^{-\top} \tilde{A} G^{-1})(y-a).$$

Wir erhalten also, dass $\tilde{A}$ durch eine orthogonale Kongruenztransformation mit G^{-1} transformiert wird.
Deswegen sprechen wir von einer Abbildung der Quadrik unter Kongruenz.

Satz XIV.9 (Klassifikation der Quadriken in $\mathbb{R}^n$ unter Kongruenz)
Sei Q eine Quadrik in $\mathbb{R}^n$. Dann gibt es eine Kongruenzabbildung f, natürliche Zahlen $\tilde{\pi}, \tilde{\nu}$ und reelle Zahlen $\beta_i > 0, 1 \leq i \leq \tilde{\pi} + \tilde{\nu}$, so dass die Quadrik $f(Q)$ durch eine der folgenden Gleichungen beschrieben wird:

$$\sum_{i=1}^{\tilde{\pi}} \frac{x_i^2}{\beta_i^2} - \sum_{i=\tilde{\pi}+1}^{\tilde{\pi}+\tilde{\nu}} \frac{x_i^2}{\beta_i^2} = 0, \qquad \tilde{\pi} \geq \tilde{\nu}, \tag{XIV.10}$$

$$\sum_{i=1}^{\tilde{\pi}} \frac{x_i^2}{\beta_i^2} - \sum_{i=\tilde{\pi}+1}^{\tilde{\pi}+\tilde{\nu}} \frac{x_i^2}{\beta_i^2} = 1, \tag{XIV.11}$$

$$\sum_{i=1}^{\tilde{\pi}} \frac{x_i^2}{\beta_i^2} - \sum_{i=\tilde{\pi}+1}^{\tilde{\pi}+\tilde{\nu}} \frac{x_i^2}{\beta_i^2} = x_{\tilde{\pi}+\tilde{\nu}+1}, \qquad \tilde{\pi} + \tilde{\nu} < n. \tag{XIV.12}$$

Beweis: Sei $Q = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid P(x_1, \ldots, x_n) = \hat{x}^\top \hat{A} \hat{x} = 0 \right\}$, wobei $\hat{x}, \hat{A}$ wie in (XIV.4) gebildet sind,

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} c & \frac{1}{2} b^\top \\ \frac{1}{2} b & \tilde{A} \end{bmatrix}, \qquad \text{und} \qquad \tilde{A} = \tilde{A}^\top.$$

<u>1. Schritt</u>: Diagonalisierung von $\tilde{A}$. Da $\tilde{A}$ reell symmetrisch ist, so gibt es nach dem Trägheitssatz von Sylvester eine orthogonale Matrix P, so dass

$$P^\top \tilde{A} P = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & \lambda_\pi & & & & & & \\ & & & \lambda_{\pi+1} & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & \lambda_{\pi+\nu} & & & \\ & & & & & & 0 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

mit $\lambda_1, \ldots, \lambda_\pi > 0$, $\lambda_{\pi+1} \ldots \lambda_{\pi+\nu} < 0$. Setze $\hat{P} = \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & P \end{array}\right]$, so gilt

$$A_1 = \hat{P}^\top \hat{A} \hat{P} = \left[\begin{array}{c|c} c & \frac{1}{2} b^\top P \\ \hline P^\top \cdot \frac{1}{2} b & P^\top \tilde{A} P \end{array}\right] =: \begin{bmatrix} c & \gamma_1 & \cdots & \gamma_n \\ \gamma_1 & \lambda_1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ \gamma_n & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

<u>2. Schritt</u>: Verschiebung des Nullpunktes

$$\text{Sei } T = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ -\frac{\gamma_1}{\lambda_1} & 1 & & & & & \\ \vdots & & \ddots & & & & \\ -\frac{\gamma_{\pi+\nu}}{\lambda_{\pi+\nu}} & & & 1 & & & \\ 0 & & & & 1 & & \\ \vdots & & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & & 1 \end{bmatrix},$$

$$A_2 = T^\top A_1 T = \left[\begin{array}{c|ccc|c} c & 0 & \cdots & 0 & \gamma_{\pi+\nu+1}\cdots\gamma_n \\ \hline 0 & \lambda_1 & & & \\ \vdots & & \ddots & & 0 \\ 0 & & & \lambda_{\pi+\nu} & \\ \hline \gamma_{\pi+\nu+1} & & & & \\ \vdots & & 0 & & 0 \\ \gamma_n & & & & \end{array}\right].$$

<u>3. Schritt</u>: Jetzt unterscheiden wir 3 Fälle.

(a) $c = 0$ und $\gamma_{\pi+\nu+1} = \ldots = \gamma_n = 0$.
Mit der Setzung $\beta_i = \frac{1}{\sqrt{|\lambda_i|}}$ erhalten wir dann Rang $\tilde{A}$ = Rang $\hat{A}$ und Teil (XIV.10).

(b) $c \neq 0$ und $\gamma_{\pi+\nu+1} = \ldots = \gamma_n = 0$, also Rang $\hat{A}$ = Rang $\tilde{A} + 1$.
Mit $\beta_i = \sqrt{\frac{|c|}{|\lambda_i|}}$ erhalten wir (XIV.11).

(c) $c \neq 0$ und es gibt $\gamma_j \neq 0,\ \pi + \nu < j \leq n \implies$ Rang $\hat{A}$ = Rang $\tilde{A} + 2$.

Setze $\gamma = \begin{bmatrix} \gamma_{\pi+\nu+1} \\ \vdots \\ \gamma_n \end{bmatrix}$ und $\varphi_1 = \frac{1}{\|\gamma\|_2}\gamma$.

Ergänze φ_1 durch $\varphi_2, \ldots, \varphi_{n-\pi-\nu}$ zu einer Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^{n-\pi-\nu}$, setze

$$\tilde{c} = -\frac{c}{2\|\gamma\|_2} \qquad \text{und} \qquad V = \left[\begin{array}{c|c|c} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & I_{\pi+\nu} & 0 \\ \hline \tilde{c}\varphi_1 & 0 & \tilde{V} \end{array}\right] \text{ mit } \tilde{V} = [\varphi_1\varphi_2\ldots\varphi_{n-\pi-\nu}].$$

Dann gilt

$$V^\top A_2 V = \left[\begin{array}{c|ccc|cccc} 0 & 0 & \cdots & 0 & \|\gamma\|_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & \lambda_1 & & & & & & \\ \vdots & & \ddots & & & & 0 & \\ 0 & & & \lambda_{\pi+\nu} & & & & \\ \hline \|\gamma\|_2 & & & & & & & \\ 0 & & & & & & & \\ \vdots & & 0 & & & & 0 & \\ 0 & & & & & & & \end{array}\right]$$

und mit $\beta_i = \sqrt{\dfrac{2\|\gamma\|_2}{|\lambda_i|}},\ \ i = 1, \ldots, \pi + \nu$ erhalten wir (XIV.12).

Beachte, je nach Vorzeichen von c wechseln die Rollen von π und ν. □

Beispiel XIV.13

$$p(x) = x_1^2 + 9x_2^2 - 6x_1x_2 + 20x_1 - 4x_2 - 10$$

$$\Longrightarrow \tilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 9 \end{bmatrix}, \quad \hat{A} = \begin{bmatrix} -10 & \frac{20}{2} & -\frac{4}{2} \\ \frac{20}{2} & 1 & -3 \\ -\frac{4}{2} & -3 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 & 10 & -2 \\ 10 & 1 & -3 \\ -2 & -3 & 9 \end{bmatrix}$$

Rang $\tilde{A} = 1$, Rang $\hat{A} = 3$, da invertierbar. Also haben wir den Fall (XIV.12).

(1) Diagonalisierung von $\tilde{A}$:

$$P_{\tilde{A}}(\lambda) = \lambda^2 - 10\lambda, \quad \Longrightarrow \quad \text{Eigenwerte } 0, 10$$

$$P = \begin{bmatrix} c & -s \\ s & c \end{bmatrix}, \text{ so dass } P^\top(\tilde{A} - 0 \cdot I)P = \begin{bmatrix} * & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$s = \frac{-3}{\sqrt{3^2+1}} = -\frac{3}{\sqrt{10}}, \quad c = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

$$P^\top \tilde{A} P = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P^\top \end{bmatrix} \hat{A} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 & \frac{8}{5}\sqrt{10} & \frac{14}{5}\sqrt{10} \\ \frac{8}{5}\sqrt{10} & 10 & 0 \\ \frac{14}{5}\sqrt{10} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(2) Verschiebung des Nullpunktes

$$T = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline -\frac{8\sqrt{10}}{5\cdot 10} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right], \qquad A_2 = T^\top A_1 T = \begin{bmatrix} -\frac{314}{25} & 0 & \frac{14}{5}\sqrt{10} \\ 0 & 10 & 0 \\ \frac{14}{5}\sqrt{10} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\gamma = \left[\frac{14}{5}\sqrt{10}\right] \in \mathbb{R}^1, \quad \varphi_1 = [1], \quad \tilde{c} = \frac{314}{25 \cdot 2 \cdot \|\gamma\|_2} = \frac{157}{700}\sqrt{10} \qquad .$$

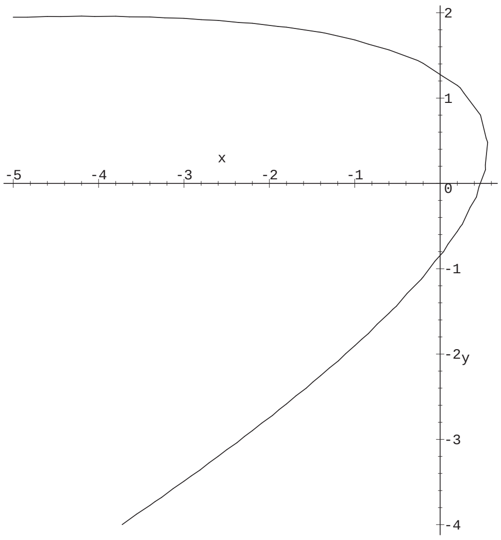
$$V = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{157}{700}\sqrt{10} & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad V^\top A_2 V = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{14}{5}\sqrt{10} \\ 0 & 10 & 0 \\ \frac{14}{5}\sqrt{10} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Setze $\beta_1 = \sqrt{\dfrac{2 \cdot 14\sqrt{10}}{5 \cdot 10}}$. Dann erhalten wir die transformierte Gleichung

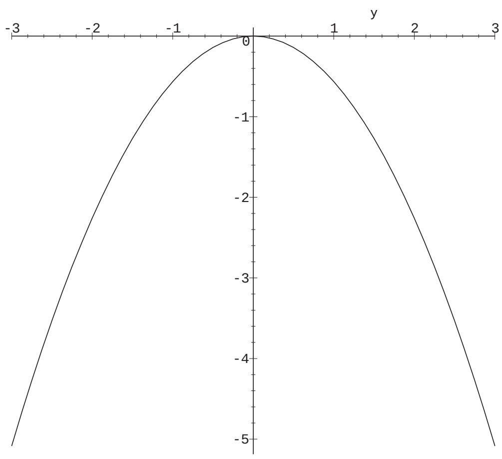
$$\frac{y_1^2}{\beta_1^2} = y_2 \qquad \text{oder} \qquad \frac{5}{28}\sqrt{10}y_1^2 - y_2 = 0, \quad \text{wobei}$$

$$\hat{x} = P \cdot T \cdot V\,\hat{y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{359}{700} & \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}} \\ \frac{493}{700} & -\frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}, \qquad \text{bzw.}$$

$$\hat{y} = V^{-1} \cdot T^{-1} \cdot \hat{P}^{-1}\,\hat{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{4}{25}\sqrt{10} & \frac{1}{\sqrt{10}} & -\frac{3}{\sqrt{10}} \\ -\frac{157}{700}\sqrt{10} & \frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$



$p(x) = x_1^2 + 9x_2^2 - 6x_1x_2 + 20x_1 - 4x_2 - 10 = 0$

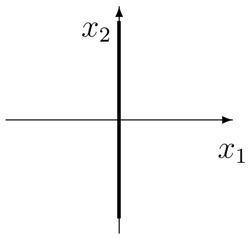


$q(y) = \frac{5}{28}\sqrt{10}y_1^2 - y_2 = 0$

Wir können damit alle Quadriken klassifizieren. Im $\mathbb{R}^2$ erhalten wir die folgenden Möglichkeiten:

Tabelle XIV.14 Quadriken in $\mathbb{R}^2$

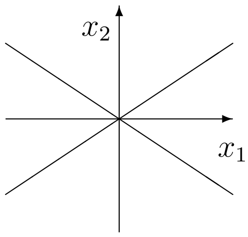
(XIV.10) $\nu = 0, \quad \pi = 1, \qquad x_1^2 = 0$



Gerade

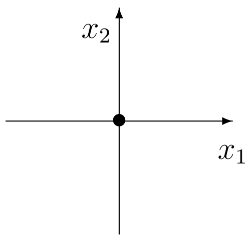
$\nu = 1, \quad \pi = 1, \qquad \dfrac{x_1^2}{\beta_1^2} - x_2^2 = 0$

$x_1 = \pm\beta_1 x_2$



zwei sich schneidende Geraden

$\nu = 0, \quad \pi = 2, \qquad \dfrac{x_1^2}{\beta_1^2} + x_2^2 = 0$

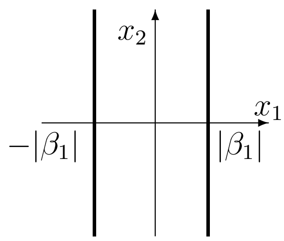


Punkt

(XIV.11) $\nu = 1, \quad \pi = 0, \qquad \dfrac{-x_1^2}{\beta_1^2} = 1$

$\emptyset$

$\nu = 0, \quad \pi = 1, \qquad \dfrac{x_1^2}{\beta_1^2} = 1$

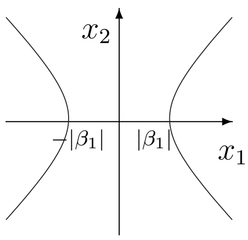


zwei parallele Geraden

$\nu = 2, \quad \pi = 0, \qquad \dfrac{-x_1^2}{\beta_1^2} - \dfrac{x_2^2}{\beta_2^2} = 1$

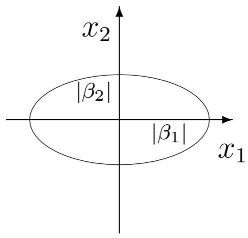
$\emptyset$

$\nu = 1, \quad \pi = 1, \qquad \dfrac{x_1^2}{\beta_1^2} - \dfrac{x_2^2}{\beta_2^2} = 1$



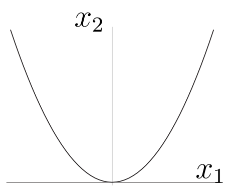
Hyperbel

$$\nu = 0, \quad \pi = 2, \qquad \frac{x_1^2}{\beta_1^2} + \frac{x_2^2}{\beta_2^2} = 1$$



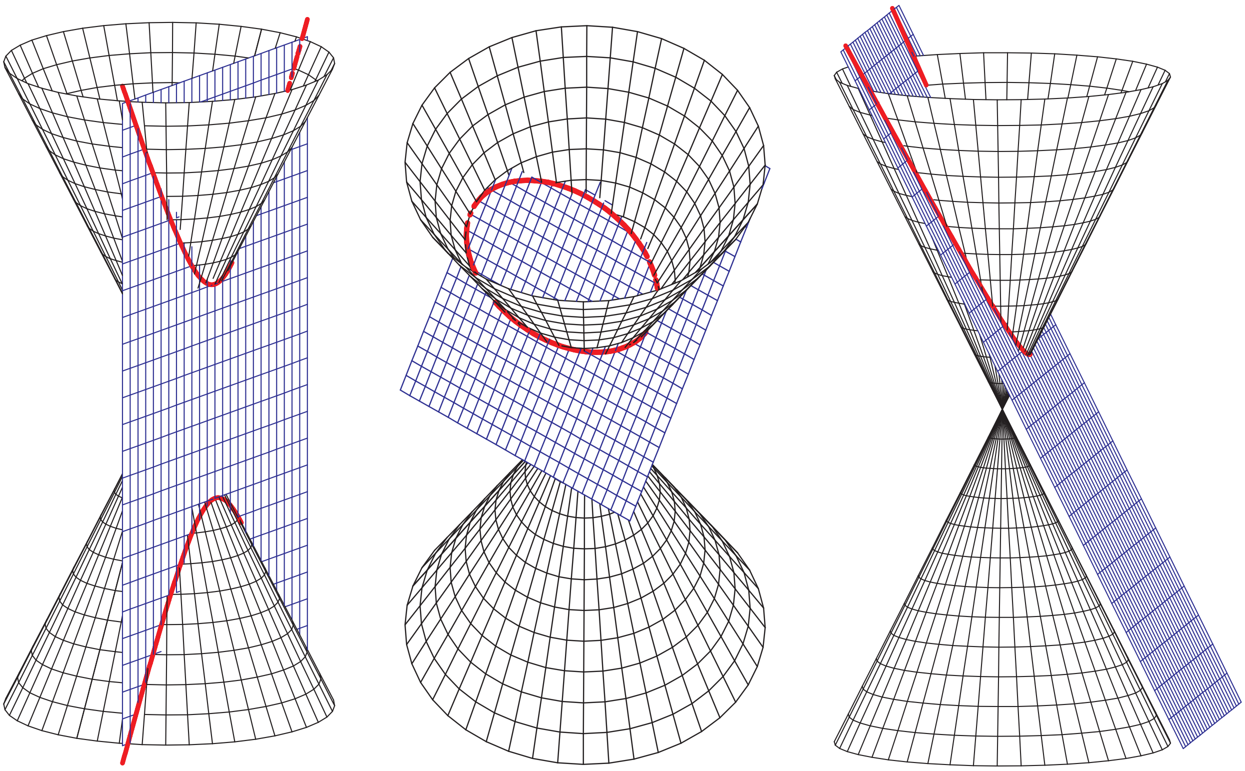
Ellipse

$$\nu = 0, \quad \pi = 1, \qquad \frac{x_1^2}{\beta_1^2} = x_2 \tag{XIV.12}$$



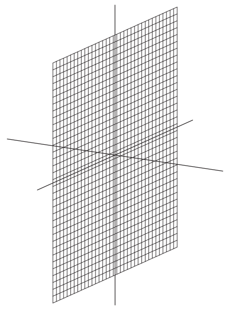
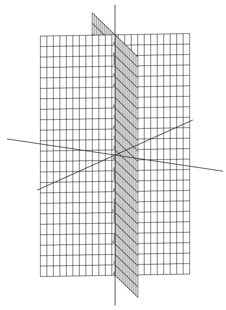
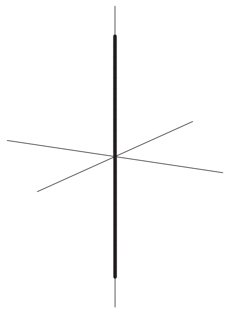
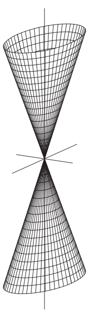
Parabel

Quadriken sind Schnitte von Ebenen mit einem doppelten Kreiskegel, sie werden daher auch Kegelschnitte genannt.

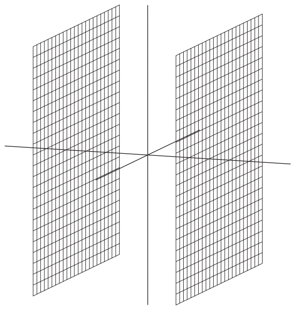


Hyperbel Ellipse Parabel

Tabelle XIV.15 Quadriken in $\mathbb{R}^3$

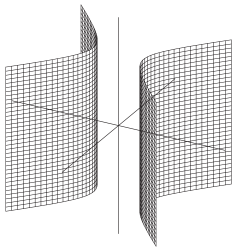
(XIV.10)	$\nu = 0,$	$\pi = 1,$	$x_1^2 = 0$		eine Ebene
	$\nu = 1,$	$\pi = 1,$	$\dfrac{x_1^2}{\beta_1^2} - x_2^2 = 0$		zwei sich schneidende Ebenen
	$\nu = 0,$	$\pi = 2,$	$\dfrac{x_1^2}{\beta_1^2} + x_2^2 = 0$		eine Gerade
	$\nu = 1,$	$\pi = 2,$	$\dfrac{x_1^2}{\beta_1^2} + \dfrac{x_2^2}{\beta_2^2} - x_3^2 = 0$		Ellipsenkegel
	$\nu = 0,$	$\pi = 3,$	$\dfrac{x_1^2}{\beta_1^2} + \dfrac{x_2^2}{\beta_2^2} + x_3^2 = 0$		Punkt
(XIV.11)	$\nu = 1,$	$\pi = 0,$	$\dfrac{-x_1^2}{\beta_1^2} = 1$		$\emptyset$

$\nu = 0, \quad \pi = 1, \qquad \dfrac{x_1^2}{\beta_1^2} = 1$ — zwei parallele Ebenen

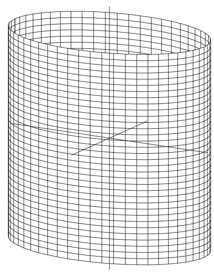


$\nu = 2, \quad \pi = 0, \qquad \dfrac{-x_1^2}{\beta_1^2} - \dfrac{x_2^2}{\beta_2^2} = 1$ — $\emptyset$

$\nu = 1, \quad \pi = 1, \qquad \dfrac{x_1^2}{\beta_1^2} - \dfrac{x_2^2}{\beta_2^2} = 1$ — Hyperbelzylinder

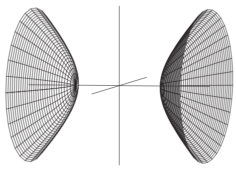


$\nu = 0, \quad \pi = 2, \qquad \dfrac{x_1^2}{\beta_1^2} + \dfrac{x_2^2}{\beta_1^2} = 1$ — Ellipsenzylinder

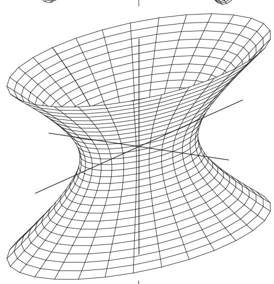


$\nu = 3, \quad \pi = 0, \qquad \dfrac{-x_1^2}{\beta_1^2} - \dfrac{x_2^2}{\beta_2^2} - \dfrac{x_3^2}{\beta_3^2} = 1$ — $\emptyset$

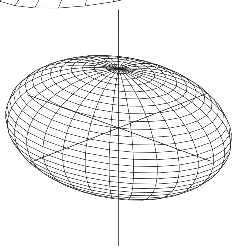
$\nu = 2, \quad \pi = 1, \qquad \dfrac{x_1^2}{\beta_1^2} - \dfrac{x_2^2}{\beta_2^2} - \dfrac{x_3^2}{\beta_3^2} = 1$ — zweischaliges Hyperboloid



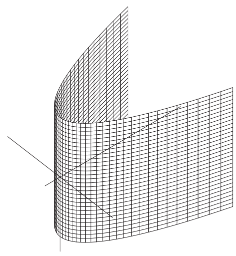
$\nu = 1, \quad \pi = 2, \qquad \dfrac{x_1^2}{\beta_1^2} + \dfrac{x_2^2}{\beta_2^2} - \dfrac{x_3^2}{\beta_3^2} = 1$ — einschaliges Hyperboloid



$\nu = 0, \quad \pi = 3, \qquad \dfrac{x_1^2}{\beta_1^2} + \dfrac{x_2^2}{\beta_2^2} + \dfrac{x_3^2}{\beta_3^2} = 1$ — Ellipsoid

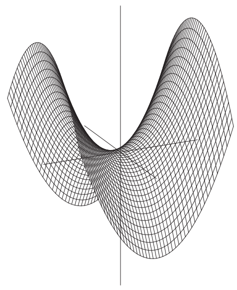


(XIV.12) $\nu = 0, \quad \pi = 1, \qquad \frac{x_1^2}{\beta_1^2} = x_2$



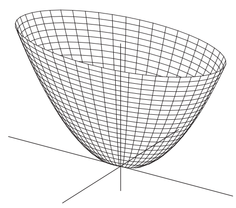
parabolischer Zylinder

$\nu = 1, \quad \pi = 1, \qquad \frac{x_1^2}{\beta_1^2} - \frac{x_2^2}{\beta_2^2} = x_3$



hyperbolisches Paraboloid

$\nu = 0, \quad \pi = 2, \qquad \frac{x_1^2}{\beta_1^2} + \frac{x_2^2}{\beta_2^2} = x_3$



elliptisches Paraboloid

Definition XIV.16 *Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{K}$. Eine Abbildung $f : V \to V$ heißt* affin linear*, falls es $a \in V$ und lineare Abbildung $g : V \to V$ gibt, so dass $f(v) = a + g(v)$. Zwei Quadriken Q_1, Q_2 heißen* affin äquivalent*, wenn es eine bijektive affine Abbildung $f : V \to V$ gibt mit $f(Q_1) = Q_2$.*

Korollar XIV.17 *Jede Quadrik in $\mathbb{R}^n$ ist affin äquivalent zu einer Quadrik in $\mathbb{R}^n$, die durch eine der folgenden Gleichungen gegeben ist:*

$$\sum_{i=1}^{\pi} x_i^2 - \sum_{i=\pi+1}^{\pi+\nu} x_i^2 = 0 \tag{XIV.18}$$

$$\sum_{i=1}^{\pi} x_i^2 - \sum_{i=\pi+1}^{\pi+\nu} x_i^2 = 1 \tag{XIV.19}$$

$$\sum_{i=1}^{\pi} x_i^2 - \sum_{i=\pi+1}^{\pi+\nu} x_i^2 = x_{\pi+\nu+1} \tag{XIV.20}$$

Beweis: Wir können natürlich annehmen, dass wir schon eine Beschreibung der Quadrik Q in der Form (XIV.10–XIV.12) haben. Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ die lineare Abbildung mit der

Matrixdarstellung

$$\begin{bmatrix} \beta_1^{-1} & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \beta_{\pi+\nu}^{-1} & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{bmatrix} \quad \text{bzgl.} \quad \{e_1, \dots, e_n\},$$

so ist f natürlich bijektiv und wir haben sofort, dass $f(Q)$ einer der Gleichungen (XIV.18 - XIV.20) genügt, denn sei zum Beispiel (XIV.10) die Form von Q, so gilt

$$\begin{aligned} y = f(x) \quad \text{mit} \quad & y_i = \frac{1}{\beta_i} x_i \quad i = 1, \dots, \pi + \nu \\ & y_i = x_i \qquad i = \pi + \nu + 1, \dots, n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y \in f(Q) \quad & \Longleftrightarrow \quad x \in Q \Longleftrightarrow \sum_{i=1}^{\pi} \frac{x_i^2}{\beta_i^2} - \sum_{i=\pi+1}^{\pi+\nu} \frac{x_i^2}{\beta_i^2} = 0 \\ & \Longleftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{\pi} y_i^2 - \sum_{i=\pi+1}^{\pi+\nu} y_i^2 = 0. \end{aligned}$$

Die anderen Fälle sind analog. □