Hauptvektoren

Sei V $\mathbb{K}$-Vektorraum, $\mathcal{A} : V \to V$ eine lineare Abbildung, also $\mathcal{A}$ ein (Vektorraum-)Endomorphismus, $\mathcal{A} \in \mathrm{End}(V)$ mit k verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_k$.

Definition:

$x_i^{(j)} \in V \setminus \{0\}$ $(i \geq 1)$ heißt **Hauptvektor der Stufe i von $\mathcal{A}$ zum Eigenwert** λ_j, falls gilt

$$(\lambda_j Id_V - \mathcal{A})^i (x_i^{(j)}) = 0, \quad \text{und} \quad (\lambda_j Id_V - \mathcal{A})^{i-1} (x_i^{(j)}) \neq 0.$$

Beachte: $x_1^{(j)}$ ist Eigenvektor zu λ_j.

$H(\lambda_j) = \mathrm{Kern}\left((\lambda_j Id_V - \mathcal{A})^{\mu(\lambda_j)}\right)$ heißt **Hauptraum zu** λ_j.

Die Räume $F_\ell = \mathrm{Kern}\left((\lambda_j Id_V - \mathcal{A})^\ell\right)$ und $G_\ell = \mathrm{Bild}\left((\lambda_j Id_V - \mathcal{A})^\ell\right)$ implizieren zwei Ketten von Unterräumen von V,

$$\begin{array}{ll} \{0\} & \subset F_0 \subset F_1 \subset \dots \subset F_\ell \subset F_{\ell+1} \subset \dots \\ V & \supset G_0 \supset G_1 \supset \dots \supset G_\ell \supset G_{\ell+1} \supset \dots \end{array}$$

mit $\dim F_\ell + \dim G_\ell = n$, deren Eigenschaften mit dem Lemma von Fittig untersucht werden können.

Lemma von Fittig:

Sei $\mathcal{B} \in \mathrm{End}(V)$ und definiere

$$d = \min\{\ell \in \mathbb{N}_0 \,|\, \mathrm{Kern}(\mathcal{B}^\ell) = \mathrm{Kern}(\mathcal{B}^{\ell+1})\}.$$

Dann gelten folgende Aussagen:

a) $d = \min\{\ell \in \mathbb{N}_0 \,|\, \mathrm{Bild}(\mathcal{B}^\ell) = \mathrm{Bild}(\mathcal{B}^{\ell+1})\}$.

b) $\mathrm{Kern}(\mathcal{B}^d) = \mathrm{Kern}(\mathcal{B}^{d+j})$ und $\mathrm{Bild}(\mathcal{B}^d) = \mathrm{Bild}(\mathcal{B}^{d+j}) \; \forall \; j \in \mathbb{N}_0$.

c) $H = \mathrm{Kern}(\mathcal{B}^d)$, $\mathrm{Bild}(\mathcal{B}^d)$ sind $\mathcal{B}$-invariant.

d) $(\mathcal{B}|_H)^d = 0 \in \mathrm{End}(H)$, $(\mathcal{B}|_{\mathrm{Bild}(\mathcal{B}^d)})^d$ ist Isomorphismus.

e) Das Minimalpolynom von $\mathcal{B}|_H$ ist $m_{\mathcal{B}|_H}(x) = x^d$.

f) $V = H \oplus \mathrm{Bild}(\mathcal{B}^d)$ mit $\dim H = \mu(0) \geq d$ und $\dim\big(\mathrm{Bild}(\mathcal{B}^d)\big) = n - \mu(0)$.
Insbesondere existiert eine Basis von V, so daß $\mathcal{B}$ die Matrixdarstellung

$$B = \begin{bmatrix} N & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad N^d = 0 \text{ und } C \in \mathbb{K}^{n-\mu(0)\times n-\mu(0)} \text{ regulär}$$

besitzt.