# Die Hauptraumzerlegung

Sei $V$ $\mathbb{K}$-Vektorraum, $\mathcal{A} : V \to V$ eine lineare Abbildung, also $\mathcal{A}$ ein (Vektorraum-)Endomorphismus, $\mathcal{A} \in \operatorname{End}(V)$ mit $k$ verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$.

**Satz von der Hauptraumzerlegung:**

Zerfällt das charakteristische Polynom von $\mathcal{A}$ in Linearfaktoren,

$$p_{\mathcal{A}}(x) = \prod_{j=1}^{k} (x - \lambda_j)^{r_j} \quad \text{mit } r_j = \mu(\lambda_j),$$

dann gilt:

a) Die Haupträume $H(\lambda_j) = \operatorname{Kern}\left((\lambda_j Id_V - \mathcal{A})^{\mu(\lambda_j)}\right)$ sind $\mathcal{A}$-invariant und $\dim H(\lambda_j) = \mu(\lambda_j)$ für $j = 1, \ldots, k$.

b) $V = H(\lambda_1) \oplus \cdots \oplus H(\lambda_k)$.

c) $\mathcal{A} = \mathcal{A}_D + \mathcal{A}_N$ mit

   (i) $\mathcal{A}_D$ diagonalisierbar,

   (ii) $\mathcal{A}_N$ nilpotent,

   (iii) $\mathcal{A}_D, \mathcal{A}_N$ kommutieren, d.h. $\mathcal{A}_D \circ \mathcal{A}_N = \mathcal{A}_N \circ \mathcal{A}_D$.

**Folgerung:** Ist $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ mit $p_A(x) = \prod_{j=1}^{k} (x - \lambda_j)^{r_j}$, $r_j = \mu(\lambda_j)$, wobei $\lambda_j$, $j = 1, \ldots, k$, die paarweise verschiedenen Eigenwerte von $A$ sind, so existiert $S \in \mathbb{K}^{n \times n}$ regulär mit

$$S^{-1} A S = \begin{bmatrix} \lambda_1 I_{r_1} + N_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_k I_{r_k} + N_k \end{bmatrix} \equiv \bigoplus_{j=1}^{k} (\lambda_j I_{r_j} + N_j),$$

$$\text{wobei } N_j = \begin{bmatrix} 0 & * & \ldots & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & * \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 \end{bmatrix}.$$