Gram-Schmidt-Orthogonalisierung

Sei $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ und V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle\, .\,, .\,\rangle$ und induzierter Norm $\|\,.\,\|$.
Weiter seien $v_1, \ldots, v_r \in V$ linear unabhängig. Dann liefert das folgende Verfahren eine ONB $\{u_1, \ldots, u_r\}$ für $\operatorname{span}\{v_1, \ldots, v_r\}$.

1. $u_1 := \frac{1}{\|v_1\|} v_1$
2. `for` $k = 1 : r-1$

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{k+1} &:= v_{k+1} - \sum_{j=1}^{k} \langle v_{k+1}, u_j \rangle u_j \\ u_{k+1} &:= \frac{1}{\|\tilde{u}_{k+1}\|} \tilde{u}_{k+1} \end{aligned}$$

`end`

Eine Variante, die für numerische Rechnung besser geeignet ist, liefert das **modifizierte Gram-Schmidt-Verfahren:**

1. $u_1 = \frac{1}{\|v_1\|} v_1$
2. `for` $k = 1 : r-1$

$\tilde{u}_{k+1} := v_{k+1}$

`for` $j = 1 : k$

$\tilde{u}_{k+1} := \tilde{u}_{k+1} - \langle \tilde{u}_{k+1}, u_j \rangle u_j$

`end`

$u_{k+1} := \frac{1}{\|\tilde{u}_{k+1}\|} \tilde{u}_{k+1}$

`end`