Trigonalisierung

Definition:

$\mathcal{A} \in \mathrm{End}(\mathcal{V})$ $(\dim(V) = n)$ bzw. $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ heißt **trigonalisierbar**, falls die Äquivalenzklasse (bzgl. Ähnlichkeit) $[\mathcal{A}]$ bzw. $[A]$ eine obere Dreiecksmatrix enthält bzw. $\exists S \in \mathbb{K}^{n\times n}$ invertierbar, so daß $S^{-1}AS$ eine obere Dreiecksmatrix ist bzw. $\exists$ Basis, in der die Matrixdarstellung von $\mathcal{A}$ obere Dreiecksgestalt hat.

Fundamentalsatz der Algebra:

Jedes $p \in \mathbb{C}[x]$ mit $\mathrm{Grad}(p) \geq 1$ hat mind. eine Nullstelle $\lambda_1 \in \mathbb{C}$.

Konsequenz: Jedes $p \in \mathbb{C}[x]$ zerfällt in Linearfaktoren, d.h.

$$p(x) = \gamma \prod_{j=1}^{\ell} (x - \lambda_j)^{r_j}, \quad \sum_{j=1}^{\ell} r_j = \mathrm{Grad}(p), \quad \gamma \in \mathbb{C}.$$

Lemma von Schur:

Für alle $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ existiert $U = U(A) \in \mathbf{U}(n)$ (= Gruppe der unitären Matrizen in $\mathbb{C}^{n\times n}$), so daß

$$U^{-1}AU \equiv U^*AU = R = \left[\ \text{◹}\ \right].$$

R ist die **Schursche Normalform** von A, U die **Schurvektormatrix** von A, $A = URU^*$ heißt **Schurzerlegung** von A.

Also: Alle $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ sind **unitär ähnlich** zu einer oberen Dreiecksmatrix, deren Diagonaleinträge die Eigenwerte von A sind.

Invariante Unterräume:

Sei $\mathcal{A} \in \text{End}(\mathcal{V})$ ($A \in \mathbb{K}^{n\times n}$). Ein Unterraum W von V ($\mathbb{K}^n$) heißt **$\mathcal{A}$-invariant (A-invariant)**, falls $\mathcal{A}(W) \subset W$ ($A \cdot W \subset W$).

Beachte: Die ersten j ($1 \leq j \leq n$) Spalten der Schurvektormatrix von $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ spannen einen A-invarianten Unterraum auf.

Allgemein gilt:

– $W \subset \mathbb{K}^n$ mit Basis $\{w_1, \ldots, w_k\} \subset \mathbb{K}^n$ ist A-invariant genau dann, wenn $A[w_1, \ldots, w_k] = [w_1, \ldots, w_k]\hat{A}$, wobei $\hat{A} \in \mathbb{K}^{k\times k}$ und $\Lambda(\hat{A}) \subset \lambda(A)$.

– Ist $W \subset V$ $\mathcal{A}$-invarianter Unterraum und $\hat{\mathcal{A}} \equiv A|_W$, d.h. $\hat{\mathcal{A}}(w) = \mathcal{A}(w)\ \forall w \in W$, dann ist $p_{\hat{\mathcal{A}}}$ Teiler von $p_{\mathcal{A}}$ bzw. $\Lambda(\hat{\mathcal{A}}) \subset \lambda(\mathcal{A})$.

Fahnen:

Kette von Unterräumen V_j eines n-dim. $\mathbb{K}$-Vektorraums V:

$$\{0\} = V_0 \subset V_1 \subset \ldots V_j \subset V_{j+1} \subset \ldots V_n = V \text{ mit } \dim V_j = j.$$

Fahne ist **$\mathcal{A}$-invariant**, falls V_j $\mathcal{A}$-invariant für alle $j = 1, \ldots, n$.

Trigonalisierungssätze:

$$\begin{aligned}\mathcal{A} \text{ trigonalisierbar } &\iff \exists\ \mathcal{A}\text{-invariante Fahne.}\\ &\iff p_{\mathcal{A}} \text{ zerfällt in Linearfaktoren.}\end{aligned}$$

Folgerung: Ist V ein $\mathbb{C}$-Vektorraum, dann sind alle $\mathcal{A} \in \text{End}(V)$ trigonalisierbar.