Diagonalisierung

Sei V $\mathbb{K}$-Vektorraum, $\mathcal{A} : V \to V$ eine lineare Abbildung, also $\mathcal{A}$ ein (Vektorraum-)Endomorphismus, $\mathcal{A} \in \mathrm{End}(V)$, und $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ eine Matrix(darstellung von $\mathcal{A}$).

Definitionen:

a) $\mathcal{A}$ bzw. A heißt **diagonalisierbar**, falls es eine vollständig aus Eigenvektoren bestehende Basis von V bzw. $\mathbb{K}^n$ gibt.

Dies bedeutet, daß die Äquivalenzklasse (bzgl. Ähnlichkeit) $[\mathcal{A}] \equiv [A]$ eine Diagonalmatrix enthält, bzw. $\exists S \in \mathbb{K}^{n\times n}$ invertierbar, so daß $S^{-1}AS$ eine Diagonalmatrix ist bzw. $\exists$ Basis, in der $\mathcal{A}$ eine diagonale Matrixdarstellung hat.

b) $\mu(\lambda) = \max\{\alpha \in \{1, \ldots, n\} \mid (x-\lambda)^\alpha \text{ ist Teiler von } p_A\}$ heißt **algebraische Vielfachheit** von $\lambda \in \Lambda(A)$.

c) $E(\lambda) = \mathrm{Kern}(\lambda I_n - A)$ ist der **Eigenraum** zu $\lambda \in \Lambda(A)$.

d) $\nu(\lambda) = \dim(E(\lambda))$ heißt **geometrische Vielfachheit** von $\lambda \in \Lambda(A)$.

Eigenschaften (analog für $\mathcal{A}$):

a) Hat A n paarweise verschiedene Eigenwerte, dann ist A diagonalisierbar.

(Beachte: Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind linear unabhängig.)

b) $\nu(\lambda) \leq \mu(\lambda)$ $\forall \lambda \in \Lambda(A)$.

c) Äquivalente Charakterisierungen der Diagonalisierbarkeit, falls A $1 \leq r \leq n$ paarweise verschiedene Eigenwerte $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ besitzt:

(i) $p_A(x) = \prod_{j=1}^{r}(x-\lambda_j)^{\mu(\lambda_j)}$ und $\nu(\lambda_j) = \mu(\lambda_j)$, $j = 1, \ldots, r$.

(ii) $\mathbb{K}^n = E(\lambda_1) \oplus \ldots \oplus E(\lambda_r)$.