Äquivalenzrelationen

- Sei M Menge, dann ist $\mathcal{R} \subset M \times M$ eine **Relation**.
  $\mathcal{R}$ heißt **Äquivalenzrelation**, falls $\forall u, v, w \in M$ gilt:

  (i) $(u, u) \in \mathcal{R}$, d.h. $\mathcal{R}$ ist **reflexiv**.

  (ii) $(u, v) \in \mathcal{R} \implies (v, u) \in \mathcal{R}$, d.h. $\mathcal{R}$ ist **symmetrisch**.

  (iii) $(u, v), (v, w) \in \mathcal{R} \implies (v, w) \in \mathcal{R}$, d.h. $\mathcal{R}$ ist **transitiv**.

  $u, v \in M$ heißen **äquivalent**, falls $(u, v) \in \mathcal{R}$.
  Notation: $u \sim v$.

  Beispiele:

  Äquivalenztransformationen
  $M = \mathbb{K}^{n\times m}$,
  $\mathcal{R}_1 = \{(A, B) \in \mathbb{K}^{n\times m} \times \mathbb{K}^{n\times m} \,|\, \exists P \in \mathbb{K}^{n\times n}, Q \in \mathbb{K}^{m\times m}$ invertierbar mit $A = PBQ\}$.

  Ähnlichkeitstransformationen
  $M = \mathbb{K}^{n\times n}$,
  $\mathcal{R}_2 = \{(A, B) \in \mathbb{K}^{n\times n} \times \mathbb{K}^{n\times n} \,|\, \exists P \in \mathbb{K}^{n\times n}$ invertierbar mit $A = PBP^{-1}\}$.

  Faktorraum/Quotientenvektorraum
  Sei $M = V = \mathbb{K}$-Vektorraum, $U \subset V$ Unterraum,
  $\mathcal{R}_3 = \{(v, w) \in V \times V \,|\, v - w \in U\}$.

- Sei M Menge, $\mathcal{R}$ eine Äquivalenzrelation auf M. $T \subset M$ heißt **Äquivalenzklasse** bzgl. $\mathcal{R}$, falls gilt:

  (i) $T \neq \emptyset$,

  (ii) $u, v \in T \implies u \sim v$,

  (iii) $u \in T,\ v \in M$ und $u \sim v \implies v \in T$.