3 Koordinatentransformationen

Für die Darstellung von dreidimensionalen Objekten wird grundsätzlich eine Reihe von Transformationen ausgeführt, die von den Modellkoordinaten bis hin zu den Gerätekoordinaten (z. B. Bildschirm) führen.

Transformations–Pipeline:

MC	Modellkoordinaten	lokale Koordinaten eines zu betrachtenden Objekts, z. B. Koordinatenursprung im Mittelpunkt und Achsen parallel zu Begrenzungsflächen
WC	Weltkoordinaten	Anordnung des Modells (bzw. mehrerer Modelle) in der „Welt“ (Berücksichtigung der räumlichen Lage zueinander)
VRC	Betrachterkoordinaten (View Reference Coordinate System)	Festlegung der Lage der Bildebene in der Welt durch: VRP (View Reference Point) Bezugspunkt, z. B. Mittelpunkt der Bildschirmebene NRP (Normal Reference Point) Punkt auf der positiven $z-$Achse, die zum Betrachter zeigt, Betrachterstandpunkt VUP (View Up Vector) Orientierung der Bildebene, $y-$Achse
NPC	Normalisierte Gerätekoordinaten (Normalized Projection Coordinate System)	Festlegung des Ausschnitts aus der „Welt“, der nach Projektion auf die Bildebene sichtbar sein soll. Dieser wird als Einheitswürfel definiert, dessen Seitenlänge einer maximal zu berechnenden Bildauflösung entspricht. (z. B. 30000 bei Verwendung von *short int* Koordinaten bei einfachsten Prozessoren)
DC	Gerätekoordinaten (Device Coordinate System)	Abbildung der geräteunabhängigen (normalisierten) Gerätekoordinaten auf die Koordinaten des konkreten Ausgabegerätes (Bildschirm, Drucker, ...)

Transformationen werden für homogene Koordinaten durch $4 \times 4-$Matrizen beschrieben:

$$p' = T \cdot p$$

bzw.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ w' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} & t_{14} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} & t_{24} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} & t_{34} \\ t_{41} & t_{42} & t_{43} & t_{44} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$$

Die Nacheinanderausführung von Transformationen T_1 und T_2 entspricht einer Gesamttransformation $T = T_2 \cdot T_1$, die durch Matrixmultiplikation zu berechnen ist.
Beachte: Matrixmultiplikation ist nicht kommutativ.

Da in der Regel darzustellende Objekte aus sehr vielen Punkten bestehen, sollte grundsätzlich zunächst die aus allen Einzeltransformationen T_i entstehende Gesamttransformation T berechnet werden, so dass nur diese eine Matrix mit allen Punkten zu multiplizieren ist.

3.1 Objekttransformationen

In einem gegebenen Koordinatensystem werden Objekte (Punkte) transformiert (bewegt).

(1) **Translation**

Verschiebung aller Punkte um einen Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$

Transformation und Rücktransformation

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & x_0 \\ 0 & 1 & 0 & y_0 \\ 0 & 0 & 1 & z_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -x_0 \\ 0 & 1 & 0 & -y_0 \\ 0 & 0 & 1 & -z_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Es gilt offensichtlich:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ w' \end{pmatrix} = T \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+x_0 \\ y+y_0 \\ z+z_0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad T^{-1} \cdot \begin{pmatrix} x+x_0 \\ y+y_0 \\ z+z_0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

(2) **Rotation**

- Transformationsmatrizen für die Drehung aller Punkte um eine Koordinatenachse um einen Winkel φ im mathematisch positiven Drehsinn:

$$R_x(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad R_y(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & 0 & \sin\varphi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\varphi & 0 & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R_z(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Rücktransformationen :

$$\begin{aligned} R_x^{-1} &= R_x^\top \\ R_y^{-1} &= R_y^\top \\ R_z^{-1} &= R_z^\top \end{aligned}$$

Die Rücktransformationen ergeben sich als Drehung um den Winkel $-\varphi$ um die gleiche Achse, unter Beachtung von $\cos(-\varphi) = \cos\varphi$ und $\sin(-\varphi) = -\sin\varphi$.

- Transformationsmatrix für die Drehung um eine beliebige durch den Ursprung verlaufende Achse (mit: $c = \cos\varphi,\ s = \sin\varphi$):

$$g : P = O + t \cdot \vec{a}, \qquad t \in \mathbb{R}, \quad a = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}, \quad |a| = 1$$

$$R_g(\varphi) = \begin{pmatrix} c+(1-c)a_x^2 & (1-c)a_xa_y - sa_z & (1-c)a_za_x + sa_y & 0 \\ (1-c)a_xa_y + sa_z & c+(1-c)a_y^2 & (1-c)a_ya_z - sa_x & 0 \\ (1-c)a_za_x - sa_y & (1-c)a_ya_z + sa_x & c+(1-c)a_z^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Andere Darstellung bei Betrachtung der Wirkung der oberen 3×3-Matrix von R_g auf die Koordinaten (x, y, z) von p: $\quad p' = cp + (1-c)aa^\top p + s(a \times p)$

Rotationsmatrizen sind orthogonale Matrizen ($R^\top = R^{-1}$ und $\det(R) = 1$).

(3) **Spiegelung**

Wir betrachten die Spiegelung an einer durch den Ursprung verlaufenden Ebene, die durch ihren Normalenvektor $\vec{n}$ gegeben ist. Der Bildpunkt P' eines Punktes P liegt auf der entgegengesetzten Seite der Ebene im gleichen Abstand d von der Ebene. Der Verbindungsvektor $\overrightarrow{PP'}$ verläuft senkrecht zur Spiegelungsebene, also parallel zu $\vec{n}$:

$$P' \;=\; P - 2 \cdot d \cdot \vec{n}\,, \qquad d \;=\; (\vec{n} \cdot \overrightarrow{OP}) \;=\; n_x p_x + n_y p_y + n_z p_z$$

d. h.

$$\begin{pmatrix} p'_x \\ p'_y \\ p'_z \\ w' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_x - 2n_x\,(n_x p_x + n_y p_y + n_z p_z) \\ p_y - 2n_y\,(n_x p_x + n_y p_y + n_z p_z) \\ p_z - 2n_z\,(n_x p_x + n_y p_y + n_z p_z) \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1-2n_x^2 & -2n_x n_y & -2n_x n_z & 0 \\ -2n_x n_y & 1-2n_y^2 & -2n_y n_z & 0 \\ -2n_x n_z & -2n_y n_z & 1-2n_z^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ 1 \end{pmatrix}$$

Spiegelungsmatrix: $\boldsymbol{S} \;=\; \boldsymbol{I} \;-\; \boldsymbol{2\,nn}^\top.$

Dies ist eine orthogonale Matrix, für die gilt: $S \;=\; S^\top \;=\; S^{-1}$ und $\det(S) \;=\; -1$.

(4) **Skalierung**

Durch Änderung der Maßeinheiten der einzelnen Koordinatenrichtungen werden alle Objekte entsprechend gestreckt bzw. gestaucht. Der Skalierungsfaktor s_x bedeutet hier eine Änderung der Einheitslänge 1 der x–Achse auf s_x^{-1}. Die Verkürzung der Einheit ($s_x > 1$) entspricht somit einer Streckung des Objekts bei gleichbleibender Einheit, für $s_x < 1$ wird das Objekt in x–Richtung gestaucht.

$$\begin{pmatrix} p'_x \\ p'_y \\ p'_z \\ w' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_x p_x \\ s_y p_y \\ s_z p_z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{d. h.} \qquad p' \;=\; M \cdot p\,.$$

Dabei gilt offensichtlich $w' = 1$.

Für den Fall einer einheitlichen Skalierung in allen drei Koordinatenrichtungen kann auch die folgende Skalierungsmatrix verwendet werden (mit $s_x = s_y = s_z = s$):

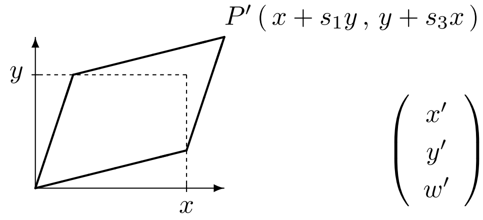
$$M_s \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s^{-1} \end{pmatrix} \qquad \text{d. h.} \quad p' \;=\; \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ s^{-1} \end{pmatrix} \;\hat{=}\; \begin{pmatrix} s \cdot p_x \\ s \cdot p_y \\ s \cdot p_z \\ 1 \end{pmatrix}$$

(5) **Scherung**

Unter der Scherung versteht man eine Verzerrung des Bildes durch die Verschiebung eines jeden Punktes in Richtung der einzelnen Koordinatenachsen um einen Betrag, der vom ursprünglichen Abstand des Punktes zu den jeweils anderen Achsen linear abhängt.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ w' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + s_1 y + s_2 z \\ s_3 x + y + s_4 z \\ s_5 x + s_6 y + z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & s_1 & s_2 & 0 \\ s_3 & 1 & s_4 & 0 \\ s_5 & s_6 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

In der Ebene:



$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ w' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & s_1 & 0 \\ s_3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

3.2 Transformation des Koordinatensystems

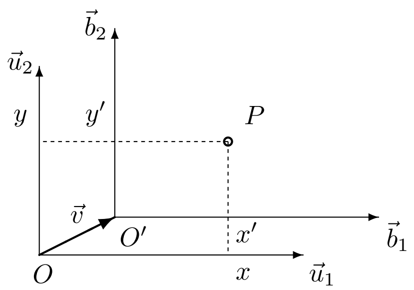
Die zu betrachtenden Objekte bleiben in der „Welt“ unverändert. Lediglich das Bezugssystem (das Betrachterkoordinatensystem) wird neu festgelegt. Bezüglich dieses neuen Koordinatensystems entstehen für alle Objekte neue Koordinaten.

Wir bezeichnen mit K_O das Originalkoordinatensystem und mit K_B das Bild– oder Betrachterkoordinatensystem:

$$\begin{aligned} K_O &= (O, \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}) \\ K_B &= \left(O', \left\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\right\}\right) \end{aligned} \tag{1}$$

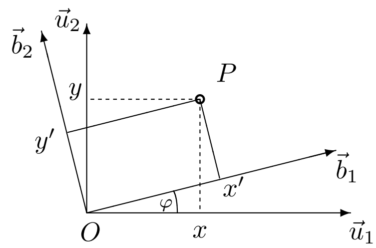
Beispiel:

Verschiebung des Ursprungs



Dabei ist $\vec{b_i} = \vec{u_i}$, d. h. die Basisvektoren stimmen überein. Es gilt: $p' = p - \vec{v}$.
Die Verschiebung des Ursprungs um den Vektor $\vec{v}$ entspricht somit einer (Objekt–) Verschiebung des Punktes P um den Vektor $-\vec{v}$.

Drehung (mit Zentrum im Ursprung)



Die Basisvektoren werden um eine durch den Ursprung verlaufende Achse um den Winkel φ gedreht (Basistransformation).
Die Koordinaten p' entsprechen denen der (Objekt–) Drehung des Punktes P mit dem Winkel $-\varphi$.

Folgerung:

Die Transformation des Koordinatensystems liefert jeweils die gleichen Bildkoordinaten wie die Inverse der entsprechenden Objekttransformation.

Die Basistransformation

Original– und Betrachterkoordinatensystem seien wie in (1) gegeben, jeweils mit einer Orthonormalbasis.

Für einen beliebigen Vektor $\vec{v}$ gilt

$$\begin{aligned} \text{in } K_O \quad &: \quad \vec{v} \;=\; \sum v_j \vec{u}_j \\ \text{in } K_B \quad &: \quad \vec{v} \;=\; \sum v'_i \vec{b}_i \end{aligned} \tag{2}$$

Damit gilt auch für die Vektoren $\vec{b}_i$ der Basis von K_B eine solche Zerlegung bezüglich der Basisvektoren $\vec{u}_j$ von K_O:

$$\vec{b}_i = \sum_{j=1}^{3} a_{ij}\vec{u}_j, \qquad i = 1, 2, 3 \tag{3}$$

oder in Koordinatenschreibweise:

$$b_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{13} \end{pmatrix}, \qquad b_2 = \begin{pmatrix} a_{21} \\ a_{22} \\ a_{23} \end{pmatrix}, \qquad b_3 = \begin{pmatrix} a_{31} \\ a_{32} \\ a_{33} \end{pmatrix} \tag{4}$$

Diese Zerlegungskoeffizienten der neuen Basis bezüglich der alten Basis werden zu einer Matrix A zusammengefasst:

$$A = \begin{pmatrix} \cdots b_1^\top \cdots \\ \cdots b_2^\top \cdots \\ \cdots b_3^\top \cdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Wegen der Orthonormalität der Basisvektoren gilt:

$$A \cdot b_1 = \begin{pmatrix} b_1^\top b_1 \\ b_2^\top b_1 \\ b_3^\top b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = e_1\,, \qquad \text{analog: } A \cdot b_2 = e_2\,, \quad A \cdot b_3 = e_3\,,$$

d. h. die Matrix A bildet die Koordinaten der neuen Basisvektoren b_i bezüglich der Basis von K_O in die Einheitsvektoren e_i ab. Daraus folgt unmittelbar:

$$A \cdot A^\top = A \cdot (b_1\, b_2\, b_3) = (e_1\, e_2\, e_3) = I$$

also: $A^\top = A^{-1}$

Für einen beliebigen Vektor $\vec{v}$ gilt nach (2):

$$\begin{aligned} \vec{v} = \sum_j v_j \vec{u}_j \qquad \text{und} \quad \vec{v} &= \sum_i v'_i \vec{b}_i = \sum_i v'_i \left(\sum_j a_{ij} \vec{u}_j \right) \\ &= \sum_j \left(\sum_i a_{ij} v'_i \right) \vec{u}_j \end{aligned}$$

$$\text{d. h. } v_j = \sum_i a_{ij} v'_i$$

Die Anwendung der Matrix A auf einen Vektor in Koordinaten von K_O liefert dessen Koordinaten in K_B. Ebenso liefert die Anwendung von $A^\top$ auf einen Vektor in Koordinaten von K_B dessen Koordinaten in K_O:

$$v' = A \cdot v \qquad \text{und} \qquad v = A^\top \cdot v'\,.$$

Die Gesamttransformation T des Koordinatensystems setzt sich aus der zuerst auszuführenden Verschiebung des Ursprungs um den Vektor $\vec{c} = \overrightarrow{OO'}$ und der anschließenden Basistransformation zusammen:

$$\begin{aligned} T &= \begin{pmatrix} A & O \\ O^\top & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & -c \\ O^\top & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & -Ac \\ O^\top & 1 \end{pmatrix} \\ T^{-1} &= \begin{pmatrix} I & c \\ O^\top & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^\top & O \\ O^\top & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^\top & c \\ O^\top & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

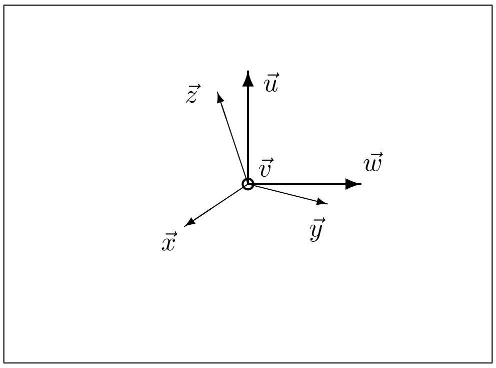
Hier ist c die Koordinatendarstellung des Vektors $\vec{c}$ im Koordinatensystem K_O. (Ac ist derselbe Vektor in Koordinaten von K_B.)

3.3 Transformation auf Betrachterkoordinaten

Wir betrachten hier zunächst nur die Basistransformation unter der Annahme, dass der Koordinatenursprung zuvor in den Mittelpunkt des zu betrachtenden Ausschnittes verschoben wurde (später z. B. auf den Mittelpunkt des Bildschirms abzubilden).

Die Basis des Betrachterkoordinatensystem K_B sei im folgenden stets definiert durch die Vektoren:

- $\vec{\boldsymbol{u}}$: **Up–Vektor**, der in der Bildebene liegt und nach oben zeigt;
- $\vec{\boldsymbol{v}}$: **Blickvektor**, senkrecht aus der Bildebene zum Betrachter (Normalenvektor der Bildebene);
- $\vec{\boldsymbol{w}}$: ein zu $\vec{\boldsymbol{u}}$ und $\vec{\boldsymbol{v}}$ **orthogonaler Vektor**, so dass $\{\vec{\boldsymbol{w}}, \vec{\boldsymbol{u}}, \vec{\boldsymbol{v}}\}$ ein Rechtssystem ist, d. h. $\vec{\boldsymbol{w}} = \vec{\boldsymbol{u}} \times \vec{\boldsymbol{v}}$.



Die Basisvektoren des Weltkoordinatensystems (K_O) sind mit $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ bezeichnet.

Die Basisvektoren $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ seien in Weltkoordinaten gegeben:

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}, \qquad v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}, \qquad w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ u_3 v_1 - u_1 v_3 \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{pmatrix}$$

Dann lautet die Matrix für die Basistransformation:

$$A = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} \qquad \text{bzw.} \qquad T = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 & w_3 & 0 \\ u_1 & u_2 & u_3 & 0 \\ v_1 & v_2 & v_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Vektorkoordinaten von $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ in der Basis des Betrachterkoordinatensystems seien mit x', y', z' bezeichnet. Im Ausgangskoordinatensystem hatten diese Vektoren die Koordinaten

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = e_1, \qquad y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = e_2, \qquad z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = e_3 \,.$$

Somit gilt:

$$x' = A \cdot x = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 \\ u_1 \\ v_1 \end{pmatrix}$$

$$y' = A \cdot y = \begin{pmatrix} w_2 \\ u_2 \\ v_2 \end{pmatrix}, \qquad z' = A \cdot z = \begin{pmatrix} w_3 \\ u_3 \\ v_3 \end{pmatrix}$$