Mathematische Grundlagen der Computergeometrie

4. Übung: Kurven und Flächen

1. Geben Sie die folgenden Gleichungen in x, y für die Koordinaten $\tilde{x}, \tilde{y}$ nach einer Drehung des Koordinatensystems um 45° an. Skizzieren Sie die Kurven vor und nach der Drehung.

a) $xy = 2$, b) $5x^2 - 6xy + 5y^2 = 32$, c) $3x^2 - 10xy + 3y^2 + 32 = 0$

2. Berechnen Sie für die folgende Raumkurve K die Krümmung $\varkappa(\tau_0)$ im Punkt $p(\tau_0)$ für $\tau_0 = \frac{\pi}{4}$:

$$K = \left\{ p : \quad p = \begin{pmatrix} x(\tau) \\ y(\tau) \\ z(\tau) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\tau \\ \sin^2\tau \\ \sin\tau\cos\tau \end{pmatrix}, \quad 0 \leq \tau < 2\pi \right\}$$

3. Die Kurve K aus Aufgabe 2 schneidet sich selbst in einem Punkt (*Doppelpunkt*), d. h.

$$p(\tau_1) = p(\tau_2),\ \tau_1 \neq \tau_2.$$

Bestimmen Sie diesen Punkt und geben Sie den Schnittwinkel an.

4. Bestimmen Sie für die folgende Raumkurve im Punkt $p_0 = p\left(\frac{\pi}{2}\right)$ den Krümmungsradius und den Krümmungsmittelpunkt, sowie die Bogenlänge des Kurvenstücks für $0 \leq \tau \leq \frac{\pi}{2}$.

$$K = \left\{ p : p = p(\tau) = \begin{pmatrix} x(\tau) \\ y(\tau) \\ z(\tau) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + 3\sin\tau \\ 5\cos\tau \\ 1 - 4\sin\tau \end{pmatrix}, 0 \leq \tau < 2\pi \right\}$$

5. Gegeben sei die übliche Parameterdarstellung $p(\tau_1, \tau_2)$ einer Kugelfläche mit dem Radius r über dem Parametergebiet $(\tau_1, \tau_2) \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \times [0, 2\pi]$.

a) Berechnen Sie die Innenwinkel des (sphärischen) Dreiecks, das als Bild eines Dreiecks aus der Parameterebene entsteht, mit den Eckpunkten

$$P_1 = p(0,0), \quad P_2 = p\left(0, \frac{\pi}{4}\right), \quad P_3 = p\left(\frac{\pi}{4}, 0\right).$$

Wie verhält sich die Winkelsumme zu der im ebenen Dreieck?

b) Geben Sie eine Flächenkurve an, die P_2 und P_3 auf kürzestem Weg verbindet.

6. Bestimmen Sie die Normalkrümmung des Breitenkreises, auf dem die Stadt Chemnitz liegt. Geben Sie dazu die Parameterdarstellung für die Erdoberfläche (als Ellipsoid) an, mit folgenden Annahmen:

Halbachse zum Äquator:	R	$\approx$	$6378\ km$,
Halbachse zu den Polen:	r	$\approx$	$6357\ km$,
geografische Breite von Chemnitz:	ψ	$\approx$	$50,825°$
	$(\cos\psi \approx 0.632,\ \sin\psi \approx 0.775)$		