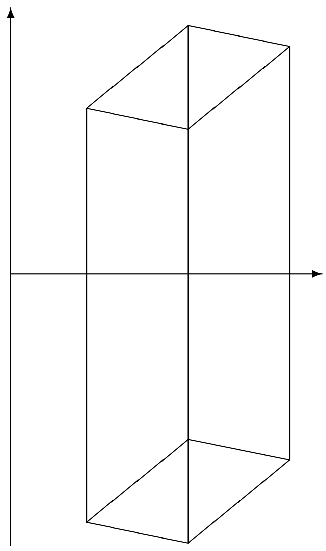
Lösungen zu Übung 3

1. Verschiebung und Basistransformation (Skalierungsfaktoren der Matrixzeilen ausgeklammet):

$$T_{ges} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{30}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 8 \\ 1 & 2 & 5 & -39 \\ 1 & 2 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Abbildung der Eckpunkte:

	Welt		Betrachter $\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{30}}, \frac{1}{\sqrt{6}}$
P_1:	(1,1, 2)	$\to$	(7,−26, −2)
P_2:	(3,1, 2)	$\to$	(3,−24, 0)
P_3:	(1,5, 2)	$\to$	(11,−18, 6)
P_4:	(3,5, 2)	$\to$	(7,−16, 8)
P_5:	(1,1,10)	$\to$	(7, 14, −10)
P_6:	(3,1,10)	$\to$	(3, 16, −8)
P_7:	(1,5,10)	$\to$	(11, 22, −2)
P_8:	(3,5,10)	$\to$	(7, 24, 0)



2. Basistransformation und Verschiebung wie in Aufgabe (1): Matrix T_{ges}, danach Perspektivtransformation:

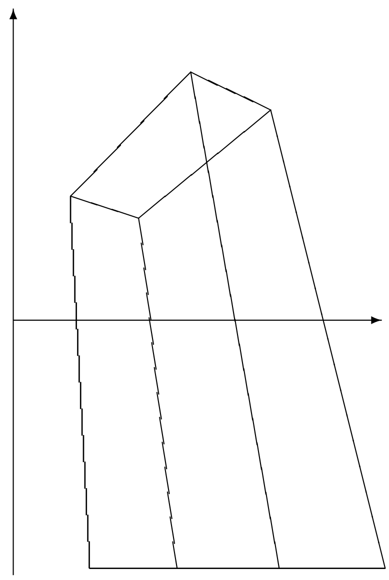
$$P_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4\sqrt{6}} & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

Skalierungsfaktoren für Punkte aus (1):

$$\frac{1}{w} = \frac{24}{24 - z\sqrt{6}}$$

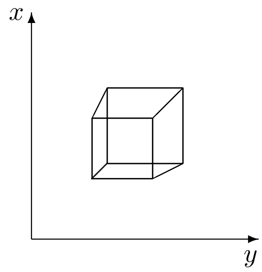
Abbildung der Eckpunkte:

	Betrachterkoord. $: (\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{30}}, \frac{1}{\sqrt{6}})$	$\frac{1}{w}$	Persp.projektion (x'',	y'')
P'_1:	(7,−26, −2)	$\frac{12}{13}$	(2.89,	−4.38)
P'_2:	(3,−24, 0)	1	(1.34,	−4.38)
P'_3:	(11,−18, 6)	$\frac{4}{3}$	(6.56,	−4.38)
P'_4:	(7,−16, 8)	$\frac{3}{2}$	(4.69,	−4.38)
P'_5:	(7, 14, −10)	$\frac{12}{17}$	(2.21,	1.80)
P'_6:	(3, 16, −8)	$\frac{3}{4}$	(1.01,	2.19)
P'_7:	(11, 22, −2)	$\frac{12}{13}$	(4.54,	3.71)
P'_8:	(7, 24, 0)	1	(3.13,	4.38)



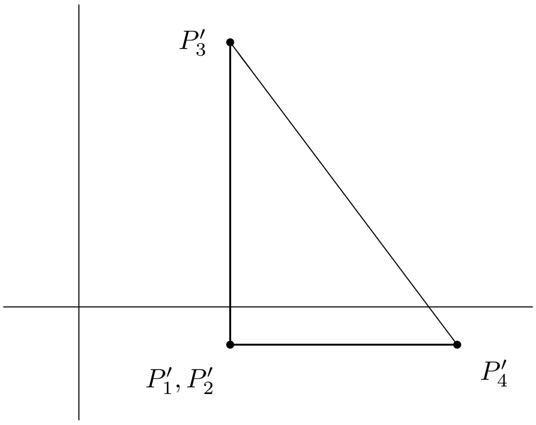
3. Projektion der Eckpunkte:

$$Tp = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \\ -z \\ 1+\frac{z}{4} \end{pmatrix}$$



Nur zwei verschiedene Skalierungsfaktoren treten auf:
für $z = 0$: $s = 1$ und für $z = 1$: $s = \frac{4}{5}$.

4. Schräge Projektion



$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\overline{P_3P_4} = \sqrt{21} \approx 4.58, \quad \overline{P'_3P'_4} = 5$$

5. Perspektivtransformation mit Abstand Δz liefert den Skalierungsfaktor für die x- und y-Koordinaten: $s_z = \frac{1}{w} = \frac{\Delta z}{\Delta z - z}$.
Skalierung für $z = -c$ („hinten“): $s_{-c} = \frac{\Delta z}{\Delta z + c}$, für $z = +c$ („vorn“): $s_{+c} = \frac{\Delta z}{\Delta z - c}$.
Flächeninhalt $2:1 \Rightarrow$ Seitenverhältnis $\sqrt{2}:1$, d.h.

$$\frac{s_{+c}}{s_{-c}} = \frac{\Delta z + c}{\Delta z - c} = \sqrt{2} \;\Rightarrow\; \Delta z = \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} c = (3 + 2\sqrt{2})c$$

Zusatz:
Nach einer Verschiebung in z-Richtung um $-z_1$ erhält man analog:

$$\Delta z = (3 + 2\sqrt{2})c - z_1$$

Der Betrachter befindet sich auf der z-Achse wieder bei $z_0 = \Delta z + z_1 = (3 + 2\sqrt{2})c$ (wegen $\Delta z = z_0 - z_1$).