Mathematische Grundlagen der Computergeometrie

1. Übung: Analytische Geometrie

1. Geben Sie eine parameterfreie Gleichung der Ebene E an, in der die beiden Geraden g_1, g_2 liegen:

$$g_1: \quad \left\{ p = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : p = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$g_2: \quad \left\{ q = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : q = s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, s \in \mathbb{R} \right\}$$

2. Gegeben seien 4 Punkte P_1, P_2, P_3, P_4, wobei P_4 von einem reellen Parameter α abhängt:

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, P_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, P_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ \boldsymbol{\alpha} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

a) Geben Sie die Geradengleichungen für die Geraden g_1 (bestimmt durch die Punkte P_1, P_2) und g_2 (bestimmt durch P_3, P_4) an!

b) Gibt es einen Wert α, bei dem sich die Geraden schneiden?

c) Gibt es einen Wert α, bei dem die Geraden parallel sind?

3. Zeigen Sie, ob die vier Punkte P_1, P_2, P_3, P_4 sämtlich in einer Ebene liegen oder nicht!

$$P_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad P_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad P_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

4. Bestimmen Sie die Lage der beiden Geraden g_1, g_2 im Raum zueinander!

$$g_1: \quad \vec{p} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$g_2: \quad \vec{q} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

5. Die beiden Ebenen E_1 und E_2 seien jeweils durch drei Punkte bestimmt:

$$E_1: \qquad A_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, A_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$E_2: \qquad B_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, B_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie die Ebenengleichungen (in Hesse'scher Normalform) und die Schnittgerade der beiden Ebenen!

6. Durch die folgenden drei Punkte wird eine Ebene bestimmt. Ermitteln Sie die Ebenengleichung (in Hesse'scher Normalform) und bestimmen Sie die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen!

$$P_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \; P_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; P_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

7. Gegeben sei ein Tetraeder durch die Koordinaten seiner vier Eckpunkte:

$$P_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; P_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \; P_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; P_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a) Bestimmen Sie das Volumen des Tetraeders (mit Hilfe der Vektorrechnung) über die Grundfläche $A_{P_1P_2P_3}$ und die Höhe h des Punktes P_0 über dieser Fläche !

b) In welcher Beziehung steht das Volumen zum Spatprodukt $\left(\overrightarrow{P_0P_1},\, \overrightarrow{P_0P_2},\, \overrightarrow{P_0P_3}\right)$?
Zeigen Sie, ob diese Beziehung für beliebige Tetraeder $P_0P_1P_2P_3$ gilt, d. h. allgemein für

$$P_1 - P_0 = \overrightarrow{p_1}, \qquad P_2 - P_0 = \overrightarrow{p_2}, \qquad P_3 - P_0 = \overrightarrow{p_3}\;.$$

8. Die drei Punkte P_1, P_2, P_3 definieren eine Ebene E.

$$P_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, P_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a) Geben Sie eine Parametergleichung für E an!

b) Bestimmen Sie die Hesse'sche Normalform der Ebenengleichung!

c) Ermitteln sie die Koordinaten des Punktes $P_0' \in E$, der durch senkrechte Projektion des Punktes $P_0 = (4, 0, 2)^\top$ auf die Ebene E (entlang ihres Normalenvektors) entsteht.

9. Zeigen Sie mittels Vektorrechnung (Produkte von Vektoren) den Satz des Thales:

„Der geometrische Ort der Scheitel aller rechten Winkel, deren Schenkel durch zwei feste Punkte gehen, ist der Kreis um den Mittelpunkt der Verbindungsstrecke dieser Punkte mit dem Abstand der beiden Punkte als Durchmesser.“

10. Ein Dreieck sei durch die Koordinaten seiner drei Eckpunkte A, B, C gegeben. Bestimmen Sie die Geradengleichung der Winkelhalbierenden des Innenwinkels im Punkt A.
Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$