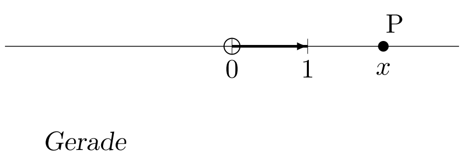
1 Grundlagen der analytischen Geometrie

1.1 Punkte, Vektoren, Geraden, Ebenen

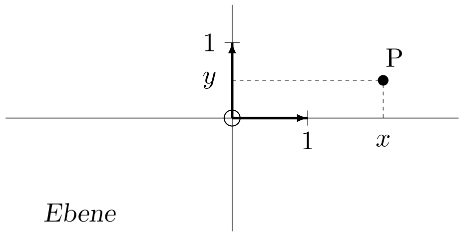
- Einsatz rechnerischer Methoden für die Behandlung geometrischer Beziehungen.
- <u>Punkten</u> werden Zahlentupel (Koordinaten) zugeordnet.

  Festlegung eines Koordinatensystems mit Ursprung und (rechtwinkligen) Koordinatenachsen, z. B.:

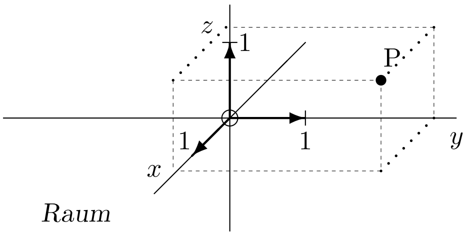
  $\mathbb{R}^1 = \{x : x \in \mathbb{R}\}$

  $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$

  $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbb{R}\}$

- <u>Vektoren</u>

  Dem Punkt $P = (x, y, z)$ kann ein ***Ortsvektor*** $\vec{p} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ zugeordnet werden (der Vektor vom Koordinatenursprung zum Punkt P).
- <u>Gerade in der Ebene</u>, definiert durch 2 voneinander verschiedene Punkte P_0 und P_1.

  Geradengleichungen:

  Zwei-Punkte-Gleichung: $\dfrac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \dfrac{x - x_0}{x_1 - x_0}$

  Punkt-Richtungs-Gleichung: $y = m\,(x - x_0) + y_0$

  Allgemeine Gleichung: $ax + by + c = 0$

  (Sonderfälle beachten !)
- <u>Gerade im Raum</u>, definiert durch $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ und $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$.

  Richtungsvektor: $\vec{a} = \dfrac{1}{\alpha}\,(\vec{p_1} - \vec{p_0}) = \dfrac{1}{\alpha} \begin{pmatrix} x_1 - x_0 \\ y_1 - y_0 \\ z_1 - z_0 \end{pmatrix}$

  mit $\alpha = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2}$

  Parameterdarstellung: $\vec{p} = \vec{p_0} + t\vec{a}\,, \qquad t \in \mathbb{R}, \quad |\vec{a}| = 1$

- Ebene im Raum, bestimmt durch:
  3 nicht auf einer Geraden liegende Punkte P_0, P_1, P_2 oder
  2 sich schneidende (oder zueinander parallele) Geraden.

  Ebenengleichungen:

  Parameterdarstellung: $\vec{p} = \vec{p_0} + t\vec{a}_1 + s\vec{a}_2\,, \quad t, s \in \mathbb{R}, \quad |\vec{a_1}| = |\vec{a_2}| = 1$

  Allgemeine Gleichung: $Ax + By + Cz + D = 0$

  Hessesche Normalform: $n_x x + n_y y + n_z z + d = 0$

  $$\vec{n} = \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} = \textit{Normalenvektor}\ |\vec{n}| = 1$$

  $d = \mathit{Abstand}$ der Ebene von $\boldsymbol{0}$

  Abschnittsgleichung: $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 1$

  a, b, c – Abstände der Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen vom Ursprung

1.2 Produkte von Vektoren

(1) ***Skalarprodukt (inneres Produkt)***

Def.: $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}| \cos\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$

Eigenschaften:

$$\begin{array}{ccccccc} \vec{a} & \perp & \vec{b} & \Rightarrow & \vec{a} \cdot \vec{b} & = & 0 \\ \vec{a} & \parallel & \vec{b} & \Rightarrow & \vec{a} \cdot \vec{b} & = & \pm|\vec{a}|\,|\vec{b}| \end{array}$$

Koordinatenschreibweise:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

(2) ***Vektorprodukt (Kreuzprodukt, äußeres Produkt)***

Def.: $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{v}$ mit: $|\vec{v}| = |\vec{a}|\,|\vec{b}| \sin\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$ und $\vec{v} \perp \vec{a}, \vec{b}$

$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{v}$ bilden in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem.

Eigenschaften:

$$\begin{array}{ccccccc} \vec{a} & \perp & \vec{b} & \Rightarrow & |\vec{a} \times \vec{b}| & = & |\vec{a}|\,|\vec{b}| \\ \vec{a} & \parallel & \vec{b} & \Rightarrow & \vec{a} \times \vec{b} & = & O \end{array}$$

Koordinatenschreibweise:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{\mathfrak{i}} & \vec{\mathfrak{j}} & \vec{\mathfrak{k}} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}$$

(3) ***Spatprodukt (gemischtes Produkt)***

Def.: $(\vec{a}\vec{b}\vec{c}) = \langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{c} \rangle = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$

Eigenschaften:

$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ sind komplanar $\iff$ $(\vec{a}\vec{b}\vec{c}) = 0$

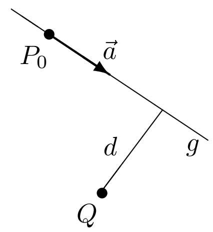
$(\vec{a}\vec{b}\vec{c}) = (\vec{b}\vec{c}\vec{a}) = (\vec{c}\vec{a}\vec{b})$

Koordinatenschreibweise:

$$(\vec{a}\vec{b}\vec{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = \begin{cases} \quad c_x\,(a_y b_z - a_z b_y) \\ +\, c_y\,(a_z b_x - a_x b_z) \\ +\, c_z\,(a_x b_y - a_y b_x) \end{cases}$$

1.3 Lagebeziehungen im Raum

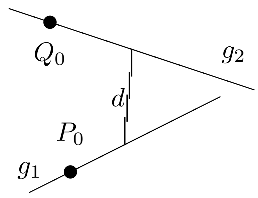
(1) ***Punkt – Gerade***



Geg.:	Gerade g:	$\vec{p} = \vec{p_0} + t\,\vec{a}\,,$	$\lvert\vec{a}\rvert = 1$
	Punkt Q:	$\vec{q}$	
Ges.:	Abstand d:	kürzeste Entfernung von Q zu allen Punkten $P(t)$ auf g.	

$$d = \frac{\lvert(\vec{q} - \vec{p_0}) \times \vec{a}\rvert}{\lvert\vec{a}\rvert} = \frac{\text{Fläche}}{\text{Grundseite}}\ \text{(des aufgespannten Parallelogramms)}$$

(2) ***Zwei Geraden***



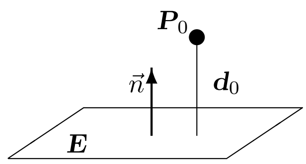
Geg.:	Gerade g_1:	$\vec{p} = \vec{p_0} + t\,\vec{a_1}\,,$	$\lvert\vec{a_1}\rvert = 1$
	Gerade g_2:	$\vec{q} = \vec{q_0} + t\,\vec{a_2}\,,$	$\lvert\vec{a_2}\rvert = 1$
Ges.:	Abstand d	bzw. Schnittpunkt	

$$d = \frac{\lvert\langle \vec{q_0} - \vec{p_0}\,,\, \vec{a_1} \times \vec{a_2}\rangle\rvert}{\lvert\vec{a_1} \times \vec{a_2}\rvert}, \quad \text{für } \lvert\vec{a_1} \times \vec{a_2}\rvert \neq 0$$

Spezialfälle:

$$\begin{array}{llll} (\vec{a_1} \times \vec{a_2}) = 0 & & \longrightarrow & \text{Geraden sind parallel (wie Punkt – Gerade)} \\ (\vec{a_1} \times \vec{a_2}) \neq 0, & d = 0 & \longrightarrow & \text{Geraden schneiden sich} \\ (\vec{a_1} \times \vec{a_2}) \neq 0, & d \neq 0 & \longrightarrow & \text{Geraden sind windschief} \end{array}$$

(3) ***Punkt – Ebene***

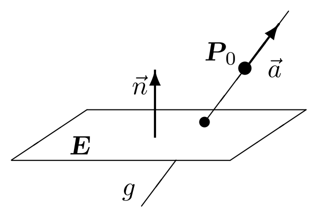


Geg.:	Ebene E:	$\vec{n} \cdot \vec{p} + d = 0\,,$	$\lvert\vec{n}\rvert = 1$
	Punkt P_0:	$\vec{p_0}$	
Ges.:	Abstand d_0		

Zu E parallele Ebene durch P_0: $\quad \vec{n} \cdot \vec{p} + (d - d_0) = 0$

$$d_0 = \vec{n} \cdot \vec{p_0} + d$$

(4) ***Gerade – Ebene***



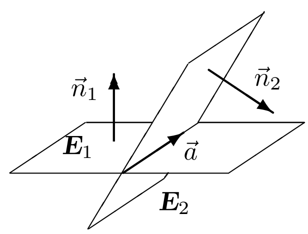
Geg.:	Ebene E:	$\vec{n} \cdot \vec{p} + d = 0\,,$	$\lvert\vec{n}\rvert = 1$
	Gerade g:	$\vec{p} = \vec{p_0} + t\vec{a}$	
Ges.:	Schnittpunkt		

Gleichung in t: $\quad (\vec{n} \cdot \vec{a})\,t + (\vec{n} \cdot \vec{p_0}) + d = 0$

Für $(\vec{n} \cdot \vec{a}) = 0$ gilt: $g \parallel E$

(5) ***Zwei Ebenen***

Geg.:	Ebene E_1:	$\vec{n_1} \cdot \vec{p} + d_1 = 0\,,$	$\lvert\vec{n_1}\rvert = 1$
	Ebene E_2:	$\vec{n_2} \cdot \vec{p} + d_2 = 0\,,$	$\lvert\vec{n_2}\rvert = 1$
Ges.:	Schnittgerade		



2 Gleichungen in $\vec{p} = (x, y, z)^\top$

$\Rightarrow$ parameterabhängige Lösung:

$$\vec{p} = \vec{p_0} + t\vec{a}$$

$$\text{mit:}\quad \vec{a} = \frac{\vec{n_1} \times \vec{n_2}}{\lvert\vec{n_1} \times \vec{n_2}\rvert}, \quad \text{für } \vec{n_1} \times \vec{n_2} \neq \mathbb{O}$$