Technische Universität Chemnitz Januar 2008
Fakultät für Mathematik, Dr. M. Pester

Ü b u n g s - K l a u s u r

Mathematische Grundlagen der Computergeometrie

(Arbeitszeit: 80 min)

1. Gegeben sind zwei Ebenen

E_1 durch die Gleichung $\quad 2x - y - z = 3,$

E_2 durch drei Punkte $\quad P_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad P_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad P_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$

a) Geben Sie die Gleichungen der beiden Ebenen in Hesse'scher Normalform an.

b) Berechnen Sie den Schnittwinkel zwischen beiden Ebenen.

c) Bestimmen Sie eine Gleichung für die Schnittgerade zwischen E_1 und E_2.

2. a) Auf welche Ebene $E = \{(x, y, z)^\top : \ ax + by + cz = 0 \ \}$ (mit $a, b, c \geq 0$) muss man eine orthogonale Projektion ausführen, damit die Längen in Richtung der Koordinatenachsen x, y, z im Verhältnis $1 : 2 : 2$ abgebildet werden?
Bestimmen Sie die Koeffizienten a, b, c für die Hessesche Normalform dieser Ebene.

b) Geben Sie eine Transformationsmatrix an, durch die E zur Bildebene des Betrachterkoordinatensystems (w, u, v) wird, wobei die Projektion der z-Achse nach oben zeigt (Koord.-Richtung u).

c) Berechnen Sie die Längen der Bilder der drei Koordinateneinheitsvektoren nach der Projektion auf E.

3. a) Bestimmen Sie die Matrix zur Transformation der Weltkoordinaten (x, y, z) in die Betrachterkoordinaten (w, u, v), so dass die Ebene $2x - 2y - z = 0$ zur Bildebene (w, u) wird. Die orthogonale Projektion des Vektors $\tilde{u} = (0, 1, 1)^\top$ soll in dieser Ebene nach oben zeigen (u-Achse).

b) Bestimmen Sie die Parameterdarstellung $(w(\tau), u(\tau))$ der orthogonalen Projektion der Raumkurve

$$K = \left\{ p(\tau) = \begin{bmatrix} 5 \sin \tau \\ 3 \cos \tau - 2 \sin \tau \\ 3 \cos \tau - 4 \sin \tau \end{bmatrix}, \tau \in [0, 2\pi) \right\}$$

auf diese Ebene. Wie lang ist diese projizierte Kurve?