Technische Universität Chemnitz

Fakultät für Mathematik

Mathematische Grundlagen der Computergeometrie

(Vorlesung: Dr. M. Pester)

Inhalt:

Literatur

[1] E. Kreyszig. *Differentialgeometrie.* Akad. Verlagsgesellschaft Geest & Portig KG, 1957.

[2] J. Encarnaçao und W. Straßer. *Computer Graphics: Gerätetechnik, Programmierung und Anwendung graphischer Systeme.* Reihe Datenverarbeitung. Oldenbourg · München · Wien, 1988.

[3] J. Plate. *Computergrafik: Einführung – Algorithmen – Programmentwicklung.* Franzis-Verlag GmbH München, 1988.

[4] C. Hornung und J. Pöpsel. 3-D a la carte. *c't*, Hefte 4, 5, 7, 8 und 10, 1989.

[5] G. Aumann, K. Spitzmüller. Computerorientierte Geometrie. Wissenschaftsverlag Mannheim · Leipzig · Wien · Zürich, 1993.

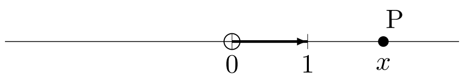
1 Grundlagen der analytischen Geometrie

1.1 Punkte, Vektoren, Geraden, Ebenen

- Einsatz rechnerischer Methoden für die Behandlung geometrischer Beziehungen.
- Punkten werden Zahlentupel (Koordinaten) zugeordnet.

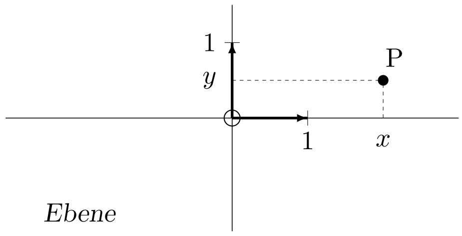
  Festlegung eines Koordinatensystems mit Ursprung und (rechtwinkligen) Koordinatenachsen, z. B.:

$\mathbb{R}^1 = \{x : x \in \mathbb{R}\}$



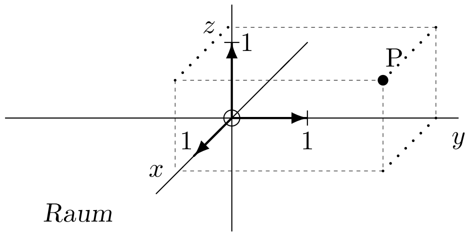
Gerade

$\mathbb{R}^2 = \{(x,y) : x, y \in \mathbb{R}\}$



Ebene

$\mathbb{R}^3 = \{(x,y,z) : x, y, z \in \mathbb{R}\}$



Raum

- Vektoren

  Dem Punkt $P = (x,y,z)$ kann ein ***Ortsvektor*** $\vec{p} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ zugeordnet werden (der Vektor vom Koordinatenursprung zum Punkt P).
- Gerade in der Ebene, definiert durch 2 voneinander verschiedene Punkte P_0 und P_1.

  Geradengleichungen:

  Zwei-Punkte-Gleichung: $\dfrac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \dfrac{x - x_0}{x_1 - x_0}$

  Punkt-Richtungs-Gleichung: $y = m\,(x - x_0) + y_0$

  Allgemeine Gleichung: $ax + by + c = 0$

  (Sonderfälle beachten !)
- Gerade im Raum, definiert durch $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ und $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$.

  Richtungsvektor: $\vec{a} = \dfrac{1}{\alpha}\,(\vec{p_1} - \vec{p_0}) = \dfrac{1}{\alpha} \begin{pmatrix} x_1 - x_0 \\ y_1 - y_0 \\ z_1 - z_0 \end{pmatrix}$

  mit $\alpha = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2}$

  Parameterdarstellung: $\vec{p} = \vec{p_0} + t\vec{a}\,, \qquad t \in \mathbb{R}, \quad |\vec{a}| = 1$

- Ebene im Raum, bestimmt durch:
  3 nicht auf einer Geraden liegende Punkte P_0, P_1, P_2 oder
  2 sich schneidende (oder zueinander parallele) Geraden.

  Ebenengleichungen:

  Parameterdarstellung: $\vec{p} = \vec{p_0} + t\vec{a_1} + s\vec{a_2}\,, \quad t, s \in \mathbb{R}, \quad |\vec{a_1}| = |\vec{a_2}| = 1$

  Allgemeine Gleichung: $Ax + By + Cz + D = 0$

  Hessesche Normalform: $n_x x + n_y y + n_z z + d = 0$

  $$\vec{n} = \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} = \textit{Normalenvektor}\ |\vec{n}| = 1$$

  $d = $ *Abstand* der Ebene von ***0***

  Abschnittsgleichung: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$

  a, b, c – Abstände der Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen vom Ursprung

1.2 Produkte von Vektoren

(1) ***Skalarprodukt (inneres Produkt)***

Def.: $\langle\vec{a}, \vec{b}\rangle = \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}| \cos\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$

Eigenschaften:

$$\begin{array}{ccccccc} \vec{a} & \perp & \vec{b} & \Rightarrow & \vec{a} \cdot \vec{b} & = & 0 \\ \vec{a} & \parallel & \vec{b} & \Rightarrow & \vec{a} \cdot \vec{b} & = & \pm|\vec{a}|\,|\vec{b}| \end{array}$$

Koordinatenschreibweise:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

(2) ***Vektorprodukt (Kreuzprodukt, äußeres Produkt)***

Def.: $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{v}$ mit: $|\vec{v}| = |\vec{a}|\,|\vec{b}| \sin\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$ und $\vec{v} \perp \vec{a}, \vec{b}$

$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{v}$ bilden in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem.

Eigenschaften:

$$\begin{array}{ccccccc} \vec{a} & \perp & \vec{b} & \Rightarrow & |\vec{a} \times \vec{b}| & = & |\vec{a}|\,|\vec{b}| \\ \vec{a} & \parallel & \vec{b} & \Rightarrow & \vec{a} \times \vec{b} & = & O \end{array}$$

Koordinatenschreibweise:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{\mathfrak{i}} & \vec{\mathfrak{j}} & \vec{\mathfrak{k}} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}$$

(3) ***Spatprodukt (gemischtes Produkt)***

Def.: $(\vec{a}\vec{b}\vec{c}) = \langle\vec{a} \times \vec{b}, \vec{c}\rangle = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$

Eigenschaften:

$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ sind komplanar $\iff$ $(\vec{a}\vec{b}\vec{c}) = 0$

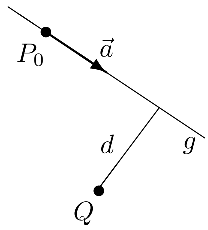
$(\vec{a}\vec{b}\vec{c}) = (\vec{b}\vec{c}\vec{a}) = (\vec{c}\vec{a}\vec{b})$

Koordinatenschreibweise:

$$(\vec{a}\vec{b}\vec{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = \begin{cases} \ c_x\,(a_y b_z - a_z b_y) \\ +\ c_y\,(a_z b_x - a_x b_z) \\ +\ c_z\,(a_x b_y - a_y b_x) \end{cases}$$

1.3 Lagebeziehungen im Raum

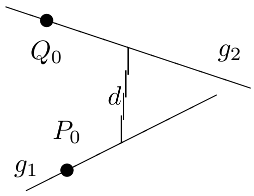
(1) ***Punkt – Gerade***



Geg.:	Gerade g:	$\vec{p} = \vec{p_0} + t\,\vec{a}\,,$	$\lvert\vec{a}\rvert = 1$
	Punkt Q:	$\vec{q}$	
Ges.:	Abstand d:	kürzeste Entfernung von Q zu allen Punkten $P(t)$ auf g.	

$$d = \frac{\lvert(\vec{q} - \vec{p_0}) \times \vec{a}\rvert}{\lvert\vec{a}\rvert} = \frac{\text{Fläche}}{\text{Grundseite}} \text{ (des aufgespannten Parallelogramms)}$$

(2) ***Zwei Geraden***



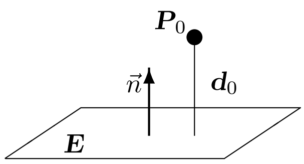
Geg.:	Gerade g_1:	$\vec{p} = \vec{p_0} + t\,\vec{a_1}\,,$	$\lvert\vec{a_1}\rvert = 1$
	Gerade g_2:	$\vec{q} = \vec{q_0} + t\,\vec{a_2}\,,$	$\lvert\vec{a_2}\rvert = 1$
Ges.:	Abstand d	bzw. Schnittpunkt	

$$d = \frac{\lvert\langle \vec{q_0} - \vec{p_0}\,,\, \vec{a_1} \times \vec{a_2}\rangle\rvert}{\lvert\vec{a_1} \times \vec{a_2}\rvert}, \quad \text{für } \lvert\vec{a_1} \times \vec{a_2}\rvert \neq 0$$

Spezialfälle:

$$\begin{array}{llll} (\vec{a_1} \times \vec{a_2}) & = & 0 & \longrightarrow \text{ Geraden sind parallel (wie Punkt – Gerade)} \\ (\vec{a_1} \times \vec{a_2}) & \neq & 0,\quad d = 0 & \longrightarrow \text{ Geraden schneiden sich} \\ (\vec{a_1} \times \vec{a_2}) & \neq & 0,\quad d \neq 0 & \longrightarrow \text{ Geraden sind windschief} \end{array}$$

(3) ***Punkt – Ebene***

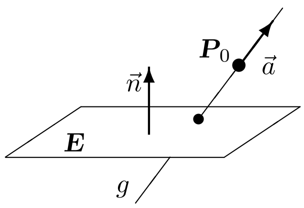


Geg.:	Ebene E:	$\vec{n} \cdot \vec{p} + d = 0\,,$	$\lvert\vec{n}\rvert = 1$
	Punkt P_0:	$\vec{p_0}$	
Ges.:	Abstand d_0		

Zu E parallele Ebene durch P_0: $\quad \vec{n} \cdot \vec{p} + (d - d_0) = 0$

$$d_0 = \vec{n} \cdot \vec{p_0} + d$$

(4) ***Gerade – Ebene***



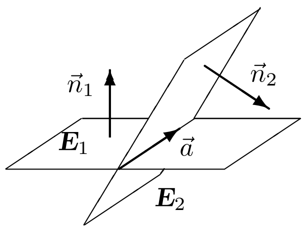
Geg.:	Ebene E:	$\vec{n} \cdot \vec{p} + d = 0\,,$	$\lvert\vec{n}\rvert = 1$
	Gerade g:	$\vec{p} = \vec{p_0} + t\vec{a}$	
Ges.:	Schnittpunkt		

Gleichung in t: $\quad (\vec{n} \cdot \vec{a})\,t + (\vec{n} \cdot \vec{p_0}) + d = 0$

Für $(\vec{n} \cdot \vec{a}) = 0$ gilt: $g \parallel E$

(5) ***Zwei Ebenen***

Geg.:	Ebene E_1:	$\vec{n_1} \cdot \vec{p} + d_1 = 0\,,$	$\lvert\vec{n_1}\rvert = 1$
	Ebene E_2:	$\vec{n_2} \cdot \vec{p} + d_2 = 0\,,$	$\lvert\vec{n_2}\rvert = 1$
Ges.:	Schnittgerade		



2 Gleichungen in $\vec{p} = (x, y, z)^\top$

$\Rightarrow$ parameterabhängige Lösung:

$$\vec{p} = \vec{p_0} + t\vec{a}$$

$$\text{mit:} \quad \vec{a} = \frac{\vec{n_1} \times \vec{n_2}}{\lvert\vec{n_1} \times \vec{n_2}\rvert}, \quad \text{für } \vec{n_1} \times \vec{n_2} \neq \boldsymbol{0}$$

2 Koordinatensysteme

2.1 Affine Koordinaten

Ein Koordinatensystem dient als Bezugssystem für Darstellung von Punkten und Vektoren (Grundobjekte der analytischen Geometrie).

Allgemeine Definition und Eigenschaften

- $[X, T(X)] \stackrel{\text{def}}{=}$ „affiner Raum“, bestehend aus
  $X \quad = \quad$ Menge von Punkten
  $T(X) \quad = \quad$ Menge von Translationen auf X
  Punkte $P, Q, R, \ldots \in X$
  Vektoren $\vec{v}, \vec{w}, \ldots \in T(X)$
- $\forall\, P, Q \in X \quad \exists \; \vec{v} \in T(X): \quad Q = P + \vec{v}$
  $\forall\, P \in X, \forall\, \vec{v} \in T(X) \quad \exists \; Q \in X: \quad Q = P + \vec{v}$
- $\vec{v} = \overrightarrow{PQ} \stackrel{\text{def}}{=} Q - P$
- $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$
- $\overrightarrow{PP} = \mathbb{O}$ (Nullvektor)
- $\overrightarrow{PQ} = -\overrightarrow{QP}$

Als ***Koordinatenursprung*** wird ein Punkt $\boldsymbol{O} \in \boldsymbol{X}$ ausgezeichnet:

$$P \in X \quad \Rightarrow \quad P = O + \overrightarrow{OP}, \qquad \overrightarrow{OP} \in T(X)$$

$$\text{„}P + Q = R\text{“} \quad \Longleftrightarrow \quad \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OR}$$

Wahl einer Basis in T(X): $\quad B = \{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n\}$

Koordinatensystem: $\quad (O, B) = (O, \{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n\})$

Affine Koordinaten:

$$\begin{array}{llll} \forall\, \vec{v} \in T(X): & \vec{v} = & \sum_j v_j \cdot \vec{u}_j\,, & v_j \in \mathbb{R} \\ \forall\, P \in X: & P = & O + \sum_j p_j \cdot \vec{u}_j\,, & p_j \in \mathbb{R} \end{array}$$

$$\text{Vektorkoordinaten:} \quad v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \quad \leftrightarrow \quad \vec{v} \in T(X)$$

$$\text{Punktkoordinaten:} \quad P = \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \quad \leftrightarrow \quad P \in X$$

Kartesische Koordinaten im $\mathbb{R}^3$:

$$\left(O, \left\{\vec{\mathfrak{i}}, \vec{\mathfrak{j}}, \vec{\mathfrak{k}}\right\}\right): \left.\begin{array}{l} \vec{\mathfrak{i}} \cdot \vec{\mathfrak{j}} = \vec{\mathfrak{i}} \cdot \vec{\mathfrak{k}} = \vec{\mathfrak{j}} \cdot \vec{\mathfrak{k}} = 0 \\ \vec{\mathfrak{i}} \cdot \vec{\mathfrak{i}} = \vec{\mathfrak{j}} \cdot \vec{\mathfrak{j}} = \vec{\mathfrak{k}} \cdot \vec{\mathfrak{k}} = 1 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \quad \text{Orthonormalsystem}$$

$$\vec{\mathfrak{i}} \leftrightarrow e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{\mathfrak{j}} \leftrightarrow e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{\mathfrak{k}} \leftrightarrow e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2.2 Homogene Koordinaten

Homogene Gleichungen sind solche Gleichungen, deren Lösungsmenge sich nicht ändert, wenn jede Gleichungsvariable durch ihr k-faches ersetzt wird.

Betrachten wir z. B. die Ebenengleichung $ax + by + cz + d = 0$ mit den Gleichungsvariablen x, y, z. Durch Einführung einer zusätzlichen Variablen w entsteht die homogene Gleichung

$$ax + by + cz + dw = 0$$

mit den Gleichungsvariablen x, y, z, w. Für jede Lösung

$$P' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ w \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad w \neq 0 \quad \text{ist auch} \quad P = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{w}x' \\ \frac{1}{w}y' \\ \frac{1}{w}z' \\ 1 \end{pmatrix}$$

eine Lösung dieser homogenen Gleichung. Die Ebenengleichung kann somit auch mit dem Skalarprodukt formuliert werden:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = 0$$

Ein <u>Punkt</u> P mit den affinen Koordinaten (x, y, z) besitzt die <u>***homogenen Koordinaten***</u> $(x, y, z, 1)$ bzw. (wx, wy, wz, w) mit $w \neq 0$.

Bei der Darstellung von <u>Vektoren</u> in homogenen Koordinaten ist $w = 0$:

$$\vec{v} = \overrightarrow{PQ} = Q - P = \begin{pmatrix} q_x \\ q_y \\ q_z \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_x - p_x \\ q_y - p_y \\ q_z - p_z \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \\ 0 \end{pmatrix}$$

Diese „Rechnung“ ist zwar nicht ganz korrekt, veranschaulicht aber den Unterschied zwischen Punkt und Richtung. Für einen Vektor in homogenen Koordinaten ist nur die Richtung von Bedeutung. Jedes Vielfache ist gleichwertig (ebenso wie bei Punkten in homogenen Koordinaten).

Anmerkungen:

- Ein „Punkt“ mit den homogenen Koordinaten $(x, y, z, 0)$ besitzt keine affinen Koordinaten. Die Betrachtung als Grenzwert liefert:

  $$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 0 \end{pmatrix} = \lim_{n\to\infty} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ \frac{1}{n} \end{pmatrix} \longrightarrow \lim_{n\to\infty} n \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

  d. h. ein Vektor kann aufgefasst werden als ein *unendlich ferner Punkt* in der entsprechenden Richtung.

- In der *projektiven Geometrie* werden *homogene Kooordinaten* in einem n-dimensionalen projektiven Raum $\mathbb{P}_n$ als die Richtungsvektoren der *1-dimensionalen Unterräume* des $\mathbb{R}^{n+1}$ definiert: $(\lambda x_1, \ldots, \lambda x_{n+1})^\top \neq 0$.
  Die **Punkte** $x = (x_1, \ldots, x_n)^\top \in \mathbb{R}^n$ können in diesen projektiven Raum eingebettet werden, z.B. als Schnittpunkte der 1D-Unterräume mit der Hyperebene $x_{n+1} = 1$.

  Die **Richtungen (Vektoren)** $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ sind dann diejenigen 1D-Unterräume, die in der Hyperebene $x_{n+1} = 0$ liegen. (s.o.: $w = 1$ bzw. $w = 0$)

3 Koordinatentransformationen

Für die Darstellung von dreidimensionalen Objekten wird grundsätzlich eine Reihe von Transformationen ausgeführt, die von den Modellkoordinaten bis hin zu den Gerätekoordinaten (z. B. Bildschirm) führen.

Transformations–Pipeline:

MC	Modellkoordinaten	lokale Koordinaten eines zu betrachtenden Objekts, z. B. Koordinatenursprung im Mittelpunkt und Achsen parallel zu Begrenzungsflächen
WC	Weltkoordinaten	Anordnung des Modells (bzw. mehrerer Modelle) in der „Welt“ (Berücksichtigung der räumlichen Lage zueinander)
VRC	Betrachterkoordinaten (View Reference Coordinate System)	Festlegung der Lage der Bildebene in der Welt durch: VRP (View Reference Point) Bezugspunkt, z. B. Mittelpunkt der Bildschirmebene NRP (Normal Reference Point) Punkt auf der positiven $z-$Achse, die zum Betrachter zeigt, Betrachterstandpunkt VUP (View Up Vector) Orientierung der Bildebene, $y-$Achse
NPC	Normalisierte Gerätekoordinaten (Normalized Projection Coordinate System)	Festlegung des Ausschnitts aus der „Welt“, der nach Projektion auf die Bildebene sichtbar sein soll. Dieser wird als Einheitswürfel definiert (Seitenlänge z. B. 30000 in ganzzahligen Koordinaten für hohe Auflösung und geringeren Rechenaufwand)
DC	Gerätekoordinaten (Device Coordinate System)	Abbildung der geräteunabhängigen (normalisierten) Gerätekoordinaten auf die Koordinaten des konkreten Ausgabegerätes (Bildschirm, Drucker, ...)

Transformationen werden für homogene Koordinaten durch $4 \times 4-$Matrizen beschrieben:

$$p' = T \cdot p$$

bzw.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ w' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} & t_{14} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} & t_{24} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} & t_{34} \\ t_{41} & t_{42} & t_{43} & t_{44} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$$

Die Nacheinanderausführung von Transformationen T_1 und T_2 entspricht einer Gesamttransformation $T = T_2 \cdot T_1$, die durch Matrixmultiplikation zu berechnen ist.
Beachte: Matrixmultiplikation ist nicht kommutativ.

Da in der Regel darzustellende Objekte aus sehr vielen Punkten bestehen, sollte grundsätzlich zunächst die aus allen Einzeltransformationen T_i entstehende Gesamttransformation T berechnet werden, so dass nur diese eine Matrix mit allen Punkten zu multiplizieren ist.

3.1 Objekttransformationen

In einem gegebenen Koordinatensystem werden Objekte (Punkte) transformiert (bewegt).

(1) **Translation**

Verschiebung aller Punkte um einen Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$

Transformation und Rücktransformation

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & x_0 \\ 0 & 1 & 0 & y_0 \\ 0 & 0 & 1 & z_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -x_0 \\ 0 & 1 & 0 & -y_0 \\ 0 & 0 & 1 & -z_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Es gilt offensichtlich:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ w' \end{pmatrix} = T \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+x_0 \\ y+y_0 \\ z+z_0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad T^{-1} \cdot \begin{pmatrix} x+x_0 \\ y+y_0 \\ z+z_0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

(2) **Rotation**

- Transformationsmatrizen für die Drehung aller Punkte um eine Koordinatenachse um einen Winkel φ im mathematisch positiven Drehsinn:

$$R_x(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad R_y(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & 0 & \sin\varphi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\varphi & 0 & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R_z(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Rücktransformation ist eine Drehung um den Winkel $-\varphi$ um die gleiche Achse. Wegen $\cos(-\varphi) = \cos\varphi$ und $\sin(-\varphi) = -\sin\varphi$ gilt:

$$R_x^{-1} = R_x^\top, \qquad R_y^{-1} = R_y^\top, \qquad R_z^{-1} = R_z^\top$$

- Transformationsmatrix für die Drehung um eine beliebige durch den Ursprung verlaufende Achse (mit: $c = \cos\varphi,\ s = \sin\varphi$):

$$g: P = O + t \cdot \vec{a}, \qquad t \in \mathbb{R}, \quad a = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}, \quad |a| = 1$$

$$R_g(\varphi) = \begin{pmatrix} c+(1-c)a_x^2 & (1-c)a_xa_y - sa_z & (1-c)a_za_x + sa_y & 0 \\ (1-c)a_xa_y + sa_z & c+(1-c)a_y^2 & (1-c)a_ya_z - sa_x & 0 \\ (1-c)a_za_x - sa_y & (1-c)a_ya_z + sa_x & c+(1-c)a_z^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Rotationsmatrizen sind orthogonale Matrizen ($R^\top = R^{-1}$ und $|R| = 1$).

(3) **Spiegelung**

Wir betrachten die Spiegelung an einer durch den Ursprung verlaufenden Ebene, die durch ihren Normalenvektor $\vec{n}$ gegeben ist. Der Bildpunkt P' eines Punktes P liegt auf der entgegengesetzten Seite der Ebene im gleichen Abstand d von der Ebene. Der Verbindungsvektor $\overrightarrow{PP'}$ verläuft senkrecht zur Spiegelungsebene, also parallel zu $\vec{n}$:

$$P' = P - 2 \cdot d \cdot \vec{n}\,, \qquad d = (\vec{n} \cdot \overrightarrow{OP}) = n_x p_x + n_y p_y + n_z p_z$$

d. h.

$$\begin{pmatrix} p'_x \\ p'_y \\ p'_z \\ w' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_x - 2n_x\,(n_x p_x + n_y p_y + n_z p_z) \\ p_y - 2n_y\,(n_x p_x + n_y p_y + n_z p_z) \\ p_z - 2n_z\,(n_x p_x + n_y p_y + n_z p_z) \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1-2n_x^2 & -2n_x n_y & -2n_x n_z & 0 \\ -2n_x n_y & 1-2n_y^2 & -2n_y n_z & 0 \\ -2n_x n_z & -2n_y n_z & 1-2n_z^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ 1 \end{pmatrix}$$

Spiegelungsmatrix: $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{I} - \boldsymbol{2\,nn}^\top$.

Spiegelungsmatrizen sind orthogonale Matrizen. Es gilt: $S = S^\top = S^{-1}$ und $|S| = -1$.

(4) **Skalierung**

Durch Änderung der Maßeinheiten der einzelnen Koordinatenrichtungen werden alle Objekte entsprechend gestreckt bzw. gestaucht. Der Skalierungsfaktor s_x bedeutet hier eine Änderung der Einheitslänge 1 der x–Achse auf s_x^{-1}. Die Verkürzung der Einheit ($s_x > 1$) entspricht somit einer Streckung des Objekts bei gleichbleibender Einheit, für $s_x < 1$ wird das Objekt in x–Richtung gestaucht.

$$\begin{pmatrix} p'_x \\ p'_y \\ p'_z \\ w' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_x p_x \\ s_y p_y \\ s_z p_z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{d. h.} \qquad p' = M \cdot p\,.$$

Dabei gilt offensichtlich $w' = 1$.

Für den Fall einer einheitlichen Skalierung in allen drei Koordinatenrichtungen kann auch die folgende Skalierungsmatrix verwendet werden (mit $s_x = s_y = s_z = s$):

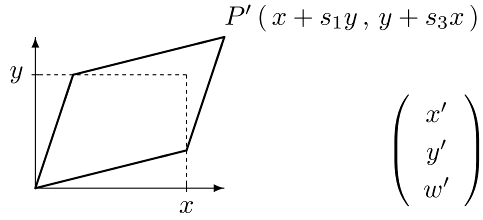
$$M_s = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s^{-1} \end{pmatrix} \qquad \text{d. h.} \quad p' = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ s^{-1} \end{pmatrix} \mathrel{\widehat{=}} \begin{pmatrix} s \cdot p_x \\ s \cdot p_y \\ s \cdot p_z \\ 1 \end{pmatrix}$$

(5) **Scherung**

Unter der Scherung versteht man eine Verzerrung des Bildes durch die Verschiebung eines jeden Punktes in Richtung der einzelnen Koordinatenachsen um einen Betrag, der vom ursprünglichen Abstand des Punktes zu den jeweils anderen Achsen linear abhängt.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ w' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + s_1 y + s_2 z \\ s_3 x + y + s_4 z \\ s_5 x + s_6 y + z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & s_1 & s_2 & 0 \\ s_3 & 1 & s_4 & 0 \\ s_5 & s_6 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

In der Ebene:



$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ w' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & s_1 & 0 \\ s_3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

3.2 Transformation des Koordinatensystems

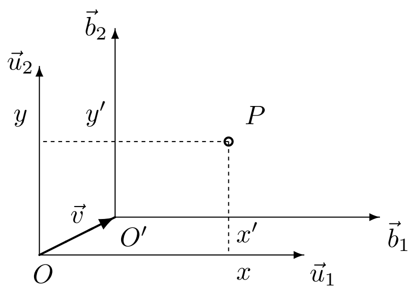
Die zu betrachtenden Objekte bleiben in der „Welt“ unverändert. Lediglich das Bezugssystem (das Betrachterkoordinatensystem) wird neu festgelegt. Bezüglich dieses neuen Koordinatensystems entstehen für alle Objekte neue Koordinaten.

Wir bezeichnen mit K_O das Originalkoordinatensystem und mit K_B das Bild– oder Betrachterkoordinatensystem:

$$\begin{aligned} K_O &= (O, \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}) \\ K_B &= \left(O', \left\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\right\}\right) \end{aligned} \tag{1}$$

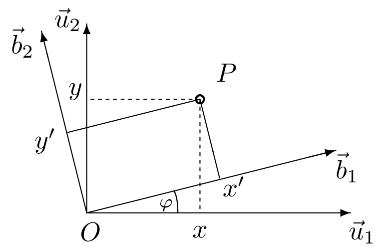
Beispiel:

Verschiebung des Ursprungs



Dabei ist $\vec{b_i} = \vec{u_i}$, d. h. die Basisvektoren stimmen überein. Es gilt: $p' = p - \vec{v}$.
Die Verschiebung des Ursprungs um den Vektor $\vec{v}$ entspricht somit einer (Objekt–) Verschiebung des Punktes P um den Vektor $-\vec{v}$.

Drehung (mit Zentrum im Ursprung)



Die Basisvektoren werden um eine durch den Ursprung verlaufende Achse um den Winkel φ gedreht (Basistransformation).
Die Koordinaten p' entsprechen denen der (Objekt–) Drehung des Punktes P mit dem Winkel $-\varphi$.

Folgerung:

Die Transformation des Koordinatensystems liefert jeweils die gleichen Bildkoordinaten wie die Inverse der entsprechenden Objekttransformation.

Die Basistransformation

Original– und Betrachterkoordinatensystem seien wie in (1) gegeben, jeweils mit einer Orthonormalbasis.

Für einen beliebigen Vektor $\vec{v}$ gilt

$$\begin{aligned} \text{in } K_O \quad &: \quad \vec{v} \;=\; \sum v_j \vec{u}_j \\ \text{in } K_B \quad &: \quad \vec{v} \;=\; \sum v_i' \vec{b}_i \end{aligned} \tag{2}$$

Damit gilt auch für die Vektoren $\vec{b}_i$ der Basis von K_B eine solche Zerlegung bezüglich der Basisvektoren $\vec{u}_j$ von K_O:

$$\vec{b}_i = \sum_{j=1}^{3} a_{ij}\vec{u}_j, \qquad i = 1,2,3 \tag{3}$$

oder in Koordinatenschreibweise:

$$b_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{13} \end{pmatrix}, \qquad b_2 = \begin{pmatrix} a_{21} \\ a_{22} \\ a_{23} \end{pmatrix}, \qquad b_3 = \begin{pmatrix} a_{31} \\ a_{32} \\ a_{33} \end{pmatrix} \tag{4}$$

Diese Zerlegungskoeffizienten der neuen Basis bezüglich der alten Basis werden zu einer Matrix A zusammengefasst:

$$A = \begin{pmatrix} \cdots b_1^\top \cdots \\ \cdots b_2^\top \cdots \\ \cdots b_3^\top \cdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Wegen der Orthonormalität der Basisvektoren gilt:

$$A \cdot b_1 = \begin{pmatrix} b_1^\top b_1 \\ b_2^\top b_1 \\ b_3^\top b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = e_1\,, \qquad \text{analog: } A \cdot b_2 = e_2\,, \quad A \cdot b_3 = e_3\,,$$

d. h. die Matrix A bildet die Koordinaten der neuen Basisvektoren b_i bezüglich der Basis von K_O in die Einheitsvektoren e_i ab. Daraus folgt unmittelbar:

$$A \cdot A^\top = A \cdot (b_1\, b_2\, b_3) = (e_1\, e_2\, e_3) = I$$

also: $A^\top = A^{-1}$

Für einen beliebigen Vektor $\vec{v}$ gilt nach (2):

$$\vec{v} = \sum_j v_j \vec{u}_j \qquad \text{und} \qquad \vec{v} = \sum_i v_i' \vec{b}_i = \sum_i v_i' \left(\sum_j a_{ij} \vec{u}_j \right) = \sum_j \left(\sum_i a_{ij} v_i' \right) \vec{u}_j$$

$$\text{d. h. } v_j = \sum_i a_{ij} v_i'$$

Die Anwendung der Matrix A auf einen Vektor in Koordinaten von K_O liefert dessen Koordinaten in K_B. Ebenso liefert die Anwendung von $A^\top$ auf einen Vektor in Koordinaten von K_B dessen Koordinaten in K_O:

$$v' = A \cdot v \qquad \text{und} \qquad v = A^\top \cdot v'\,.$$

Die Gesamttransformation T des Koordinatensystems setzt sich aus der zuerst auszuführenden Verschiebung des Ursprungs um den Vektor $\vec{c} = \overrightarrow{OO'}$ und der anschließenden Basistransformation zusammen:

$$\begin{aligned} T &= \begin{pmatrix} A & \mathbb{O} \\ \mathbb{O}^\top & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & -c \\ \mathbb{O}^\top & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & -Ac \\ \mathbb{O}^\top & 1 \end{pmatrix} \\ T^{-1} &= \begin{pmatrix} I & c \\ \mathbb{O}^\top & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^\top & \mathbb{O} \\ \mathbb{O}^\top & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^\top & c \\ \mathbb{O}^\top & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

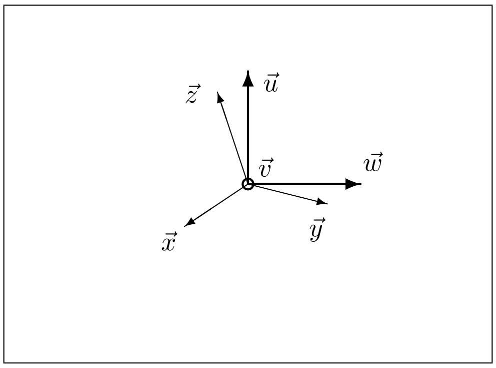
Hier ist c die Koordinatendarstellung des Vektors $\vec{c}$ im Koordinatensystem K_O. (Ac ist derselbe Vektor in Koordinaten von K_B.)

3.3 Transformation auf Betrachterkoordinaten

Wir betrachten hier zunächst nur die Basistransformation unter der Annahme, dass der Koordinatenursprung zuvor in den Mittelpunkt des zu betrachtenden Ausschnittes verschoben wurde (später z. B. auf den Mittelpunkt des Bildschirms abzubilden).

Die Basis des Betrachterkoordinatensystem K_B sei im folgenden stets definiert durch die Vektoren:

- $\vec{\boldsymbol{u}}$: **Up–Vektor**, der in der Bildebene liegt und nach oben zeigt;
- $\vec{\boldsymbol{v}}$: **Blickvektor**, senkrecht aus der Bildebene zum Betrachter (Normalenvektor der Bildebene);
- $\vec{\boldsymbol{w}}$: ein zu $\vec{\boldsymbol{u}}$ und $\vec{\boldsymbol{v}}$ **orthogonaler Vektor**, so dass $\{\vec{\boldsymbol{w}},\vec{\boldsymbol{u}},\vec{\boldsymbol{v}}\}$ ein Rechtssystem ist, d. h. $\vec{\boldsymbol{w}} = \vec{\boldsymbol{u}} \times \vec{\boldsymbol{v}}$.



Die Basisvektoren des Weltkoordinatensystems (K_O) sind mit $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ bezeichnet.

Die Basisvektoren $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ seien in Weltkoordinaten gegeben:

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}, \qquad v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}, \qquad w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2v_3 - u_3v_2 \\ u_3v_1 - u_1v_3 \\ u_1v_2 - u_2v_1 \end{pmatrix}$$

Dann lautet die Matrix für die Basistransformation:

$$A = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} \qquad \text{bzw.} \qquad T = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 & w_3 & 0 \\ u_1 & u_2 & u_3 & 0 \\ v_1 & v_2 & v_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Vektorkoordinaten von $\vec{x},\vec{y},\vec{z}$ in der Basis des Betrachterkoordinatensystems seien mit x', y', z' bezeichnet. Im Ausgangskoordinatensystem hatten diese Vektoren die Koordinaten

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = e_1, \qquad y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = e_2, \qquad z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = e_3\,.$$

Somit gilt:

$$x' = A \cdot x = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 \\ u_1 \\ v_1 \end{pmatrix}$$

$$y' = A \cdot y = \begin{pmatrix} w_2 \\ u_2 \\ v_2 \end{pmatrix}, \qquad z' = A \cdot z = \begin{pmatrix} w_3 \\ u_3 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

4 Projektionen

4.1 Parallelprojektion

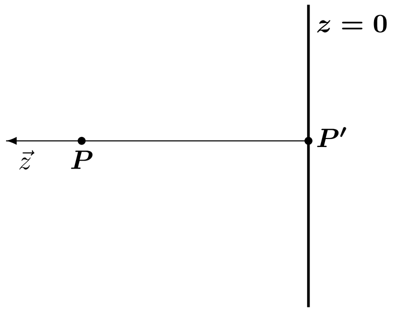
(a) ***Senkrechte Projektion auf eine Koordinatenebene***

Wir wählen als Projektionsebene die $xy-$Ebene, d. h. in den Bezeichnungen von Abschnitt 3.3:

$$\vec{v} = \vec{z}, \qquad \vec{u} = \vec{y}, \qquad \vec{w} = \vec{x}$$

Die Projektion in $z-$Richtung (auf die Ebene $z = 0$) bewirkt keine Veränderung der $x-$ und $y-$Koordinaten:

$$p = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad p' = P_z p = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



Die Projektionsmatrix lautet:

$$P_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) ***Schiefe Projektion auf eine Koordinatenebene***

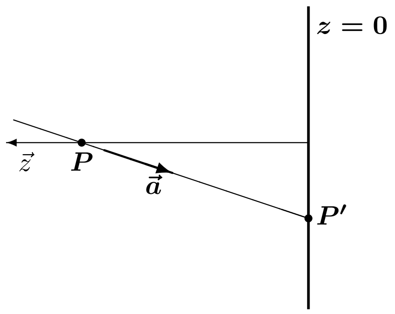
Die Projektionsebene sei weiterhin die $xy-$Koordinatenebene. Die Projektionsstrahlen verlaufen in Richtung eines Vektors $\vec{a}$, der nicht parallel (und im allgemeinen auch nicht senkrecht) zur Projektionsebene ist. Der Bildpunkt P' des Punktes P ist der Schnittpunkt der Geraden

$$g: \quad \{p + t \cdot \vec{a}\}$$

mit der Projektionsebene ($z = 0$). Mit

$$a = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \\ 0 \end{pmatrix}, \quad p = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}, \quad p' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

wird der Schnittpunkt für $t_0 = -\frac{z}{a_z}$ erreicht. Die Projektionsmatrix in Richtung $\vec{a}$ hat die Gestalt:



$$P_a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{a_x}{a_z} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{a_y}{a_z} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(c) ***Senkrechte Projektion auf beliebige Ebene***

Die Projektionsebene $E = (P_0, \vec{n})$ ist durch einen Bezugspunkt P_0 und ihren Normalenvektor gegeben.

Zunächst ist eine Transformation des Koordinatensystems (siehe 3.3) durchzuführen, bevor die Projektionsmatrix P_z angewendet werden kann. Zur Orientierung der Bildebene ist der Up-Vektor festzulegen:

Es sei also $\vec{u}'$ ein Vektor, dessen projiziertes Bild $\vec{u}_p$ nach oben zeigen soll. Es gilt

$$\vec{u}_p = \vec{u}' - (\vec{u}' \cdot \vec{n})\vec{n}$$

und als Up-Vektor wird der normierte Vektor $\vec{u} = \dfrac{\vec{u}_p}{|\vec{u}_p|}$ verwendet.

Die Projektion setzt sich schließlich zusammen aus

- der Verschiebung des Koordinatenursprungs in den Punkt P_0
- der Basistransformation in die Basis $\{\vec{w}, \vec{u}, \vec{v}\}$ mit $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{n}$ und $\vec{v} = \vec{n}$.
- der Projektion P_z, d. h. aus der Richtung des dritten Basisvektors nach der Basistransformation.

$$P_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w_1 & w_2 & w_3 & 0 \\ u_1 & u_2 & u_3 & 0 \\ v_1 & v_2 & v_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -c_1 \\ 0 & 1 & 0 & -c_2 \\ 0 & 0 & 1 & -c_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4.2 Spezialfälle

(1) ***Orthoprojektionen***

(1a) ***Hauptrisse***

Durch orthogonale Projektion in Achsenrichtung entstehen die aus der darstellenden Geometrie bekannten Hauptrisse:

Grundriss: Blick von *oben*

Aufriss: Blick von *vorn*

Seitenriss: Blick von *einer Seite*

Je nach Zuordnung der Koordinatenachsen zu den Richtungen *oben, vorn,* Seite *rechts* oder *links* ergibt sich die Projektionsmatrix.

(1b) ***Axonometrie***

Drei beliebige, von einem Punkt ausgehende Strecken in der (Projektions-) Ebene können als Bild von drei aufeinander senkrecht stehenden gleichlangen Strecken im Raum aufgefasst werden, sofern ihre Endpunkte nicht alle auf einer Geraden durch den Ursprung liegen (Satz von POHLKE).

Wir betrachten einige Spezialfälle einer orthogonalen Projektion auf eine Ebene, die durch ihren Normalenvektor $\vec{n}$ gegeben ist.

Isometrische Projektion: $\vec{n} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(\vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \vec{u}_3)$ bzw. $n = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Der Vektor $\vec{n}$ bildet mit jeder Achsenrichtung den gleichen Winkel (gleiche x-, y- und z-Komponenten).
Ein beliebiger Vektor $\vec{u}^* = (u_1^*, u_2^*, u_3^*)^\top$ wird als Up–Vektor gewählt. Sein Bild in der Projektionsebene ist $\vec{u}_p = \vec{u}^* - (\vec{n} \cdot \vec{u}^*)\, \vec{n}$. Dann gilt

$$u_p = \begin{pmatrix} u_1^* \\ u_2^* \\ u_3^* \end{pmatrix} - \frac{1}{3}\,(u_1^* + u_2^* + u_3^*) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} u^*$$

Für den Vektor $u = \dfrac{u_p}{|u_p|}$ gilt dann

$$u_1 + u_2 + u_3 = 0 \qquad (5)$$

$$u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 1 \qquad (6)$$

Die Matrix zur Basistransformation in die Basis $\{\vec{w}, \vec{u}, \vec{v}\}$ mit $\vec{v} = \vec{n}$ und $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$ lautet dann

$$A = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} u_2 - u_3 & u_3 - u_1 & u_1 - u_2 \\ u_1\sqrt{3} & u_2\sqrt{3} & u_3\sqrt{3} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Somit erhält man als Projektion der drei Einheitsvektoren des Ausgangskoordinatensystems die folgenden Vektoren

$$P \cdot e_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} u_2 - u_3 \\ u_1\sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad P \cdot e_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} u_3 - u_1 \\ u_2\sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$P \cdot e_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} u_1 - u_2 \\ u_3\sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix}$$

und es gilt mit (5) und (6): $|P \cdot e_k|^2 = \frac{2}{3}, \quad (k = 1, 2, 3)$

Wegen der gleichen Länge der drei Einheitsvektoren nennt man diese Projektion *isometrisch.*

Dimetrische Projektion: $\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{2+\alpha^2}}(\alpha\vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \vec{u}_3)$ bzw. $n = \frac{1}{\sqrt{2+\alpha^2}} \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Der Vektor $\vec{n}$ bildet mit zwei Achsenrichtungen einen gleichen Winkel, mit der dritten Richtung aber einen anderen. Man erhält in analoger Weise (für $u = e_3$):

$$P \cdot e_1 = \frac{1}{\sqrt{(1+\alpha^2)(2+\alpha^2)}} \begin{pmatrix} -\sqrt{2+\alpha^2} \\ -\alpha \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$P \cdot e_2 = \frac{1}{\sqrt{(1+\alpha^2)(2+\alpha^2)}} \begin{pmatrix} -\alpha\sqrt{2+\alpha^2} \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$P \cdot e_3 = \frac{1}{\sqrt{(1+\alpha^2)(2+\alpha^2)}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1+\alpha^2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und für die Längen der projizierten Einheitsvektoren gilt:

$$|P \cdot e_1|^2 = \frac{2}{2+\alpha^2}, \qquad |P \cdot e_2|^2 = |P \cdot e_3|^2 = \frac{1+\alpha^2}{2+\alpha^2}.$$

Trimetrische Projektion: $\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2}}(\alpha_1\vec{u}_1 + \alpha_2\vec{u}_2 + \alpha_3\vec{u}_3)$

bzw. $n = \frac{1}{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2}} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$

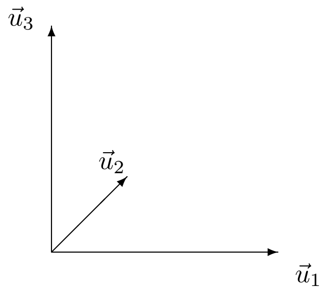
Der Vektor $\vec{n}$ bildet mit allen drei Achsenrichtungen unterschiedliche Winkel. Die Projektion der Einheitsvektoren liefert verschieden lange Strecken.

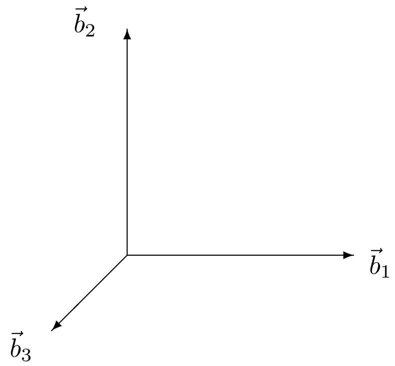
(2) ***Schiefe Projektion***

Als Projektionsebene wird eine Koordinatenebene gewählt. Die Projektionsrichtung sei nicht orthogonal zur Projektionsebene. In diesem Abschnitt (Seite 14) wurde bereits die Matrix P_a für die Projektion in Richtung eines Vektors $\vec{a}$ auf die $xy-$Ebene angegeben.

Bei Projektion auf eine andere Koordinatenebene (z. B. $xz-$Ebene) ist zuvor eine Basistransformation auszuführen, um dann diese Matrix anzuwenden.

Beispiel:





Für die Basisvektoren $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ bzw. $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\}$ gilt in diesem Beispiel offensichtlich

$$\begin{array}{rcl} \vec{b}_1 & = & \vec{u}_1 \\ \vec{b}_2 & = & \vec{u}_3 \\ \vec{b}_3 & = & -\vec{u}_2 \end{array} \quad \text{mit der Transformation} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Hat der Vektor $\vec{a}$ im Originalkoordinatensystem ($u-$Basis) die Komponenten (a_1, a_2, a_3), so hat er im transformierten Koordinatensystem die Komponenten $(a_1, a_3, -a_2)$. Die auf die Koordinaten in der $b-$Basis anzuwendende Projektionsmatrix in Richtung $\vec{a}$ hat somit die Gestalt:

$$P_{a'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{a_1}{-a_2} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{a_3}{-a_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{a_1}{a_2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{a_3}{a_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Multiplikation der Matrizen $P_{a'}$ und A ergibt die Gesamtprojektion (einschließlich Basistransformation):

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{a_1}{a_2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{a_3}{a_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{a_1}{a_2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{a_3}{a_2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Wir betrachten den **Spezialfall:** $\hat{}(\vec{a}, \vec{n}) = \dfrac{\pi}{4}$

Wegen $\cos \hat{}(\vec{a}, \vec{n}) = \frac{-a_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ gilt dann: $a_1^2 + a_3^2 = a_2^2$

und somit für die Projektion der Basisvektoren des Ausgangskoordinatensystems:

$$\begin{array}{lcccll} \vec{u}_1: & u'_1 & = & Pe_1 & = & (1,0,0,0)^\top & |u'_1| = 1 \\ \vec{u}_2: & u'_2 & = & Pe_2 & = & (-\frac{a_1}{a_2}, -\frac{a_3}{a_2}, 0, 0)^\top & |u'_2| = \sqrt{\frac{a_1^2+a_3^2}{a_2^2}} = 1 \\ \vec{u}_3: & u'_3 & = & Pe_3 & = & (0,1,0,0)^\top & |u'_1| = 1 \end{array}$$

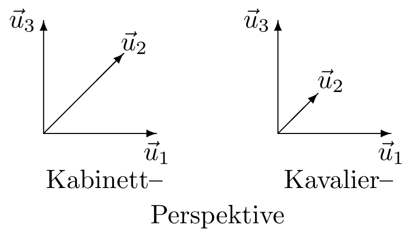
Die Projektion ist folglich isometrisch. Alle drei Koordinatenachsen werden unverzerrt dargestellt. Setzt man einen normierten Richtungsvektor $\vec{a}$ und gleiche Winkel zu den $\vec{u}_1$- und $\vec{u}_3$-Achsen voraus, so gilt:

$$a_2 = -\frac{1}{2}\sqrt{2} \qquad \text{und} \qquad a_1 = a_3 = \frac{1}{2}$$

Die Projektion von $\vec{u}_2$ lautet dann:

$$u_2' = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0, 0)^\top.$$

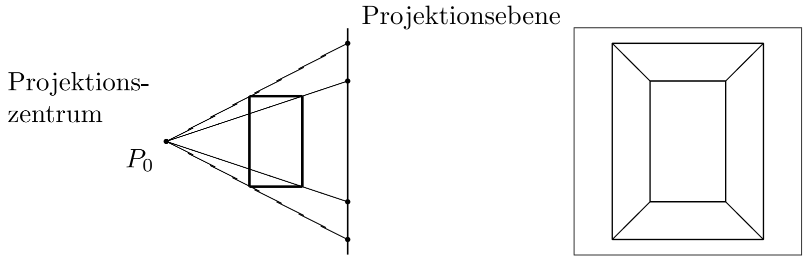
Eine solche isometrische Projektion, bei der zwei Achsen rechtwinklig zueinander dargestellt werden und die dritte Achse mit beiden einen Winkel von 45^o bildet, nennt man ***Kabinettperspektive***. Durch eine Verkürzung der Länge der dritten Achse auf die Hälfte (Skalierung im Ausgangssystem) entsteht die bekanntere ***Kavalierperspektive***.



4.3 Perspektiv–Projektion

Die Projektionsstrahlen verlaufen nicht parallel, sondern gehen von einem Punkt, dem ***Projektionszentrum*** aus. Dieser Punkt entspricht dem Standpunkt des Betrachters.

Prinzip:



Eigenschaften: (offensichtliche Unterschiede zur Parallelprojektion)

- Die relative Entfernung vom Projektionszentrum hat Einfluss auf das Bild der Projektion, d. h. es erfolgt eine von der Raumtiefe abhängige Skalierung.
- Geraden, die im Original parallel sind, müssen nicht im Bild parallel sein.

Das Betrachterkoordinatensystem sei so gewählt, dass die xy-Ebene die Projektionsebene ist und das Projektionszentrum sich senkrecht über dem Koordinatenursprung, also auf der positiven z-Achse im Abstand z_0 befindet: $P_0 = (0, 0, z_0, 0)^\top$.

Durch Berechnung der Schnittpunkte der Projektionsstrahlen mit der Projektionsebene erhält man den von z abhängigen Skalierungsfaktor

$$\frac{1}{1 - \dfrac{z}{z_0}}$$

Führt man diese Skalierung durch (ohne die Projektion auf die xy-Ebene), so entsteht eine ***Perspektivtransformation***, d h. ein dreidimensionales Bild, dessen senkrechte Parallelprojektion auf die xy-Ebene das gleiche zweidimensionale Bild liefert wie die Perspektivprojektion. Die Matrizen T_z für die Perspektivtransformation und P_z für die Perspektivprojektion besitzen die folgende Gestalt:

$$T_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{z_0} & 1 \end{pmatrix}, \qquad P_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{z_0} & 1 \end{pmatrix}$$

Für einen beliebigen Punkt mit den affinen Koordinaten (x, y, z) bzw. homogenen Koordinaten $(x, y, z, 1)$ ergibt sich ein Bildpunkt:

$$T_z \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 - \frac{z}{z_0} \end{pmatrix} \qquad \text{bzw.} \qquad P_z \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \\ 1 - \frac{z}{z_0} \end{pmatrix}$$

mit den affinen Koordinaten

$$x' = \frac{x}{1 - \frac{z}{z_0}}, \qquad y' = \frac{y}{1 - \frac{z}{z_0}}, \qquad z' = \frac{z}{1 - \frac{z}{z_0}} = \frac{z_0 z}{z_0 - z}$$

Für einen beliebigen Vektor $\vec{a}$ mit den homogenen Koordinaten $(a_x, a_y, a_z, 0)$ und $a_z \neq 0$ (d. h. $\vec{a}$ ist nicht parallel zur Projektionsebene) liefert die Perspektivtransformation

$$T_z \cdot \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \\ -\frac{a_z}{z_0} \end{pmatrix}$$

als Bild des Vektors einen Punkt mit den affinen Koordinaten $(-z_0 \frac{a_x}{a_z}, -z_0 \frac{a_y}{a_z}, -z_0)$. Dieser Punkt ist der ***Fluchtpunkt*** des Vektors $\vec{a}$.

Im Falle $a_z = 0$ ist offensichtlich das Bild des Vektors mit dem Vektor selbst identisch.

Folgerungen:

- Punkte in der z-Ebene $(z = 0)$ werden durch T_z nicht verändert.
- Parallele Geraden, die außerdem parallel zur z-Ebene verlaufen, bleiben im Bild parallel.
- Parallele Geraden, die nicht parallel zur z-Ebene sind, besitzen einen Fluchtpunkt, in dem sich ihre Bilder schneiden.
- Alle Fluchtpunkte befinden sich in der Ebene $z = -z_0$.

Bemerkung:

Liegt das Projektionszentrum in einem beliebigen Punkt (x_0, y_0, z_0), so erhält man für die Perspektivtransformation nach entsprechender Basistransformation für die Bildebene mit dem Normalenvektor $v = \frac{1}{\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}}(x_0, y_0, z_0)^\top$ eine Matrix der Art:

$$T_0 = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 & w_3 & 0 \\ u_1 & u_2 & u_3 & 0 \\ v_1 & v_2 & v_3 & 0 \\ \frac{-x_0}{x_0^2+y_0^2+z_0^2} & \frac{-y_0}{x_0^2+y_0^2+z_0^2} & \frac{-z_0}{x_0^2+y_0^2+z_0^2} & 1 \end{pmatrix}$$

Die Bestandteile der Transformationsmatrix:

$$\begin{array}{r}3\left\{\begin{array}{|c|c|}\hline \text{Drehung} & \\ \text{Spiegelung} & \longleftarrow \text{Translation} \\ \text{Skalierung} & \\ \text{Scherung} & \\ \hline \end{array}\right. \\ 1\left\{\begin{array}{|c|c|} \text{Perspektive} & \longleftarrow \text{Gesamtskalierung} \\ \hline \end{array}\right.\end{array}$$

5 Kurven und Flächen in der Ebene und im Raum

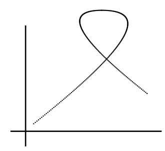
5.1 Parameterdarstellung für Kurven

Für Kurven oder Flächen gibt es unterschiedliche Definitionsgleichungen:

	in der Ebene	im Raum		
Implizite Form	$F(x,y)=0$			$F(x,y,z)=0$
Explizite Form	$y=f(x)$			$z=f(x,y)$
Parameterdarstellung	$x=x(\tau)$	$x=x(\tau)$	oder	$x=x(\tau_1,\tau_2)$
	$y=y(\tau)$	$y=y(\tau)$		$y=y(\tau_1,\tau_2)$
		$z=z(\tau)$		$z=z(\tau_1,\tau_2)$

Die Parameterform erweist sich als gut geeignet für die Darstellung von Kurven mittels Computer:

- einfache Berechnung durch Inkrementierung des Parameters τ mit vorzugebender Schrittweite;
- bei impliziter Form sind komplizierte Berechnungen zu erwarten (z. B. Lösung nichtlinearer Gleichungen, um für jeden Wert x einen oder mehrere zugehörige y-Werte zu bestimmen);
- jedem Parameterwert ist eindeutig ein Raumpunkt zugeordnet; bei Funktionsdarstellung (explizite Form) bereiten die Mehrdeutigkeiten Probleme.



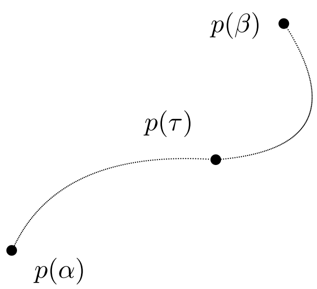
Wir bezeichnen im folgenden die Koordinaten (x,y,z) mit (x_1,x_2,x_3) und betrachten ein Kurvenstück K der folgenden Art:

$$K=\left\{p=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}:\ x_j=x_j(\tau),\ \sum_j|\dot{x}_j(\tau)|\neq 0,\ \alpha\leq\tau\leq\beta\right\}\tag{7}$$

Mit $\dot{x}_j(\tau)$ wird die Ableitung der j-ten Komponente bezeichnet: $\dot{x}_j(\tau)=\dfrac{\mathrm{d}x_j(\tau)}{\mathrm{d}\tau}$. Die Differenzierbarkeit der einzelnen Funktionen $x_j(\tau)$ wird vorausgesetzt. Die in (7) angegebene Forderung, dass für jeden Kurvenpunkt mindestens eine der Ableitungen $\dot{x}_j$ von Null verschieden ist, sichert das „Fortschreiten“ der Kurve mit sich änderndem Parameterwert für jeden Punkt.

Jeder Kurvenpunkt p ist somit als Wert der (Vektor-) Funktion $p=p(\tau)$ für einen konkreten Parameterwert τ aufzufassen.
Ebenso sei $\dot{p}(\tau)$ die Ableitung der Funktion $p(\tau)$:

$$\dot{p}=\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\\dot{x}_2\\\dot{x}_3\end{pmatrix}.$$

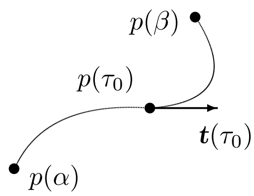


Charakteristika einer Kurve

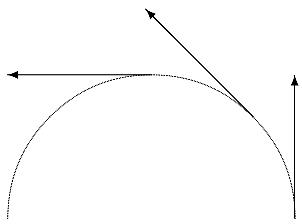
(a) ***Tangente***

Die Tangente in einem beliebigen Kurvenpunkt $p_0 = p(\tau_0)$ ist bestimmt durch den Punkt p_0 selbst und einen Richtungsvektor $\boldsymbol{t}_0$, der die Richtungsänderung der Kurve K in diesem Punkt p_0 beschreibt, also

$$\boldsymbol{t}(\tau) = \frac{\mathrm{d}p(\tau)}{\mathrm{d}\tau} = \dot{p}(\tau)$$



Beispiel: Kreisbogen in der Ebene: $K = \left\{ p = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\tau \\ \sin\tau \end{pmatrix} : 0 \le \tau \le \pi \right\}$



$$\boldsymbol{t}(\tau) = \begin{pmatrix} \dot{x}_1(\tau) \\ \dot{x}_2(\tau) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\tau \\ \cos\tau \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{t}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{t}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{t}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(b) ***Bogenlänge***

Die Bogenlänge einer Kurve K lässt sich berechnen als Grenzwert der Länge eines die Kurve annähernden Polygons mit den Eckpunkten $p_k = p(\tau_k) \quad (k = 0, \ldots, n)$

$$\text{mit:} \quad \tau_0 = \alpha, \quad \tau_n = \beta, \quad \Delta\tau = \tau_k - \tau_{k-1} = \frac{\beta - \alpha}{n} \quad \text{also:} \quad \lim_{n\to\infty} \Delta\tau = 0$$

$$S_K = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\sum_{j=1}^{3} (x_j(\tau_k) - x_j(\tau_{k-1}))^2} = \int_\alpha^\beta \sqrt{\sum_{j=1}^{3} \dot{x}_j^2(t)}\,\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta |\dot{p}(t)|\,\mathrm{d}t$$

Die Länge des Kurvenstücks zwischen $p(\alpha)$ und einem beliebigen Punkt $p(\tau)$ ergibt sich als Integral mit variabler oberer Grenze:

$$s(\tau) = \int_\alpha^\tau \sqrt{\sum_{j=1}^{3} \dot{x}_j^2(t)}\,\mathrm{d}t = \int_\alpha^\tau |\dot{p}(t)|\,\mathrm{d}t$$

Die Bogenlänge s ist somit als Funktion von τ angebbar und es gilt $\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\tau} = |\dot{p}|$. Die Betrachtung eines „unendlich kleinen" Kurvenstücks liefert das

$$\textit{\textbf{Bogendifferential:}} \quad \mathrm{d}s = \sqrt{\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2}\,\mathrm{d}\tau = |\dot{p}|\,\mathrm{d}\tau$$

$$\text{und es gilt:} \quad S_K = \int_0^{s(\beta)} \mathrm{d}s$$

Jeder Kurvenpunkt p kann als Funktion $p = p(\tau)$ wie auch als Funktion $p = p(s)$ angegeben werden (eigentlich $p = \tilde{p}(s)$, aber hier soll die Unterscheidung der Funktionen durch Angabe des jeweils anderen Parameters genügen). Das gleiche trifft für die Komponenten von P zu:

$$\tilde{x}_j(s) = \tilde{x}_j(s(\tau)) = x_j(\tau)$$

Auch hier sei im folgenden $x_j(s) = \tilde{x}_j$. Wir bezeichnen weiterhin die Ableitungen nach dem (beliebigen) Parameter τ mit $\dot{x}_j$, die Ableitungen nach der Bogenlänge aber mit x_j'.

$$\dot{x}_j(\tau) = \frac{\mathrm{d}x_j(\tau)}{\mathrm{d}\tau}, \qquad x_j'(s) = \frac{\mathrm{d}x_j(s)}{\mathrm{d}s}$$

Wegen $s = s(\tau)$ gilt:

$$\frac{\mathrm{d}x_j}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}x_j}{\mathrm{d}\tau} \cdot \frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}s}, \qquad \text{d. h.} \quad x_j' = \frac{\dot{x}_j}{|\dot{p}|}$$

Damit ergibt sich für den Tangentenrichtungsvektor (mit der Bogenlänge als Parameter):

$$\boldsymbol{t}(s) = p'(s) = \begin{pmatrix} x_1'(s) \\ x_2'(s) \\ x_3'(s) \end{pmatrix} = \frac{1}{|\dot{p}(\tau)|} \begin{pmatrix} \dot{x}_1(\tau) \\ \dot{x}_2(\tau) \\ \dot{x}_3(\tau) \end{pmatrix} = \frac{1}{|\dot{p}(\tau)|} \cdot \dot{p}(\tau), \quad \Longrightarrow \quad |\boldsymbol{t}(s)| = 1$$

(c) ***Begleitendes Dreibein***

Für jeden Kurvenpunkt $p(s)$ wird ein lokales Koordinatensystem mit den (orthonormierten) Basisvektoren $\{\boldsymbol{t}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{b}\}$ bestimmt, welches das Verhalten der Kurve in diesem Punkt charakterisiert. Die Bewegung dieses Dreibeins bei Variation von s entspricht der Bewegung eines starren Körpers entlang der Kurve.

Für diese Basisvektoren gelten folgende Beziehungen:

Tangente : $\boldsymbol{t}(s) = p'(s)$ bzw. $\dfrac{\dot{p}(\tau)}{|\dot{p}(\tau)|} = \boldsymbol{t}(\tau)$

Binormale : $\boldsymbol{b}(s) = \dfrac{p'(s) \times p''(s)}{|p'(s) \times p''(s)|}$ bzw. $\dfrac{\dot{p}(\tau) \times \ddot{p}(\tau)}{|\dot{p}(\tau) \times \ddot{p}(\tau)|} = \boldsymbol{b}(\tau)$

Hauptnormale: $\boldsymbol{n}(s) = \boldsymbol{b}(s) \times \boldsymbol{t}(s)$ bzw. $\boldsymbol{b}(\tau) \times \boldsymbol{t}(\tau) = \boldsymbol{n}(\tau)$

Je zwei dieser Vektoren spannen eine Ebene auf, deren Normalenvektor jeweils der dritte Vektor ist:

E_n**:** Normalebene

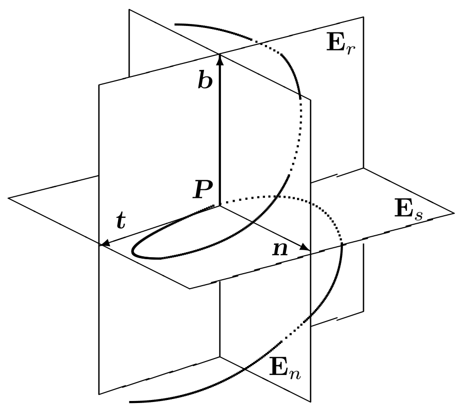
enthält alle Normalen der Kurve K im Punkt P

E_s**:** Schmiegebene

die dem Verlauf der Kurve am nächsten kommende Ebene

E_r**:** rektifizierende Ebene

rechtwinklig zur Hauptnormalen.



Für die zweiten Ableitungen nach der Bogenlänge s bzw. nach dem beliebigen Parameter τ gilt folgende Beziehung:

$$p'' = \frac{\mathrm{d}p'}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}p'}{\mathrm{d}\tau} \cdot \frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}s} = \frac{1}{|\dot{p}|^2} \left(\ddot{p} - \frac{\langle \dot{p}, \ddot{p} \rangle}{|\dot{p}|^2}\, \dot{p} \right)$$

$$|p''| = \frac{1}{|\dot{p}|^3} \sqrt{|\dot{p}|^2\, |\ddot{p}|^2 - \langle \dot{p}, \ddot{p} \rangle^2}$$

(d) ***Krümmung***

Die Krümmung $\varkappa(s)$ einer Kurve K charakterisiert für jeden Kurvenpunkt $p = p(s)$ die Abweichung der Kurvenform von einer Geraden.

Als **Krümmungskreis** wird derjenige Kreis in der Schmiegebene der Kurve (für den Punkt $p(s)$) bezeichnet, der sich als Grenzfall einer Folge von Kreisen durch drei benachbarte Punkte auf der Kurve ergibt, wenn deren Abstand gegen Null geht. Die (konstante) Krümmung dieses Kreises ist die Krümmung der Kurve im gegebenen Punkt. Der Mittelpunkt des Krümmungskreises liegt auf der Hauptnormalen des Kurvenpunktes. Der Radius des Krümmungskreises sei ϱ. Dann gilt:

$$\varkappa(s) = \frac{1}{\varrho(s)} = |p''(s)|$$

Da für eine Gerade der Richtungsvektor (erste Ableitung) konstant ist, verschwindet die zweite Ableitung und es ist $\varkappa(s) \equiv 0$. In diesem Fall existiert kein Krümmungskreis (bzw. unendlicher Radius).

(e) ***Windung (Torsion)***

Für jeden Kurvenpunkt $p(s)$ ist die Windung $w(s)$ ein Maß dafür, wie sich die Kurve aus der Schmiegebene herauswindet, d. h. ein Maß für die Änderung der Schmiegebene (bzw. deren Normalenvektor): $\boldsymbol{b}' = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{b}}{\mathrm{d}s}$. Es gilt:

$$w(s) = \frac{|p'\, p''\, p'''|}{|p''|^2}$$

Die Größe $\chi = \dfrac{1}{|w|}$ wird als *Torsionsradius* bezeichnet.

Zwischen den einzelnen charakteristischen Werten einer Kurve gelten die folgenden Beziehungen (*Frenet'sche Formeln*):

$$\begin{aligned} \boldsymbol{t}' &= \varkappa \boldsymbol{n} \\ \boldsymbol{n}' &= -\varkappa \boldsymbol{t} + w\boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{b}' &= -w\boldsymbol{n} \end{aligned}$$

5.2 Parameterdarstellung für Flächen

Eine einfach zusammenhängende Fläche im Raum wird in folgender Weise durch zwei unabhängige Parameter τ_1 und τ_2 definiert.

$$F = \left\{ p = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} : x_j = x_j(\tau_1, \tau_2), \quad (\tau_1, \tau_2) \in D \subseteq \mathbb{R}^2, \quad x_j \quad \text{partiell diff.bar} \right\} \tag{8}$$

Die Matrix $J = J(\tau_1, \tau_2)$ aller partiellen Ableitungen (***Jacobi-Matrix***) stellt eine Charakteristik für jeden Kurvenpunkt $p(\tau_1, \tau_2)$ dar:

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \tau_1} & \frac{\partial x_1}{\partial \tau_2} \\ \frac{\partial x_2}{\partial \tau_1} & \frac{\partial x_2}{\partial \tau_2} \\ \frac{\partial x_3}{\partial \tau_1} & \frac{\partial x_3}{\partial \tau_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots \\ p_{\tau_1} & p_{\tau_2} \\ \vdots & \vdots \end{pmatrix} \qquad \text{mit:} \quad p_{\tau_j} = \frac{\partial p}{\partial \tau_j}\,(\tau_1, \tau_2)$$

Ist der Rang der Jacobimatrix für einen Punkt gleich 2, so spricht man von einem regulären Punkt; ist er kleiner, so nennt man den Punkt singulär. Diese Einteilung ist von der gewählten Parameterdarstellung abhängig und muss keine geometrische Eigenschaft des Punktes sein.

Für einen singulären Punkt lassen sich die Parameter (τ_1, τ_2) nicht eindeutig angeben, d. h. es gibt mehrere Parameterwerte, die denselben Flächenpunkt bestimmen.

Es gilt: $\operatorname{rang}(J) = 2 \quad \Leftrightarrow \quad p_{\tau_1} \times p_{\tau_2} \neq \mathbb{O}$, da das Vektorprodukt alle zweireihigen Determinanten aus J enthält.

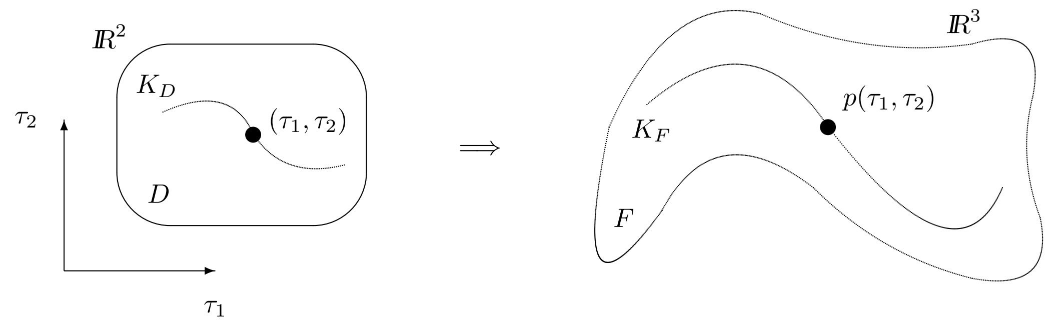
5.3 Flächenkurven

Um geometrische Eigenschaften von Flächen zu bestimmen, werden geeignete Kurven auf diesen Flächen betrachtet.

Es sei im folgenden:

D – einfach zusammenhängendes beschränktes Gebiet in der $\tau_1\tau_2$ - Ebene,

F – die Punktmenge im Raum, die durch Variation von τ_1, τ_2 in D entsteht; $F = F(\tau_1, \tau_2)$



Zu einer Kurve K_D in der Parameterebene gehört die Flächenkurve K_F auf der Fläche F:

$$K_D = \left\{ u \in D : u = \begin{pmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{pmatrix} \wedge \tau_1 = \tau_1(\tau),\, \tau_2 = \tau_2(\tau) \right\}$$

$$K_F = \left\{ p \in F : p = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \wedge x_j = x_j(\tau_1(\tau), \tau_2(\tau)),\, j = 1,2,3 \right\}$$

Koordinatenlinien sind spezielle Flächenkurven für jeweils einen konstanten Parameter, d. h. für Parameterkurven K_D, die parallel zu einer der beiden Achsen in der $\tau_1\tau_2$–Ebene verlaufen:

$$K_{F_1} = \{p \in F : p = p(c_1, \tau)\} \quad \text{d.h. } \tau_1 = c_1,\, \tau_2 = \tau$$

$$K_{F_2} = \{p \in F : p = p(\tau, c_2)\} \quad \text{d.h. } \tau_1 = \tau,\, \tau_2 = c_2$$

Insofern werden die Parameterwerte (τ_1, τ_2) als **Gaußsche Koordinaten** der Punkte auf der Fläche F bezeichnet.

5.4 Tangenten an Flächenkurven

Die Tangentenrichtung einer Flächenkurve K_F beschreibt die Änderung des Kurvenverlaufs bei Variation des Parameters τ, d. h. die Flächenkurve hat in einem beliebigen Punkt

$$p(\tau) = \begin{pmatrix} x_1(\tau) \\ x_2(\tau) \\ x_3(\tau) \end{pmatrix} \qquad \text{die Tangentenrichtung:}$$

$$\dot{p}(\tau) = \frac{\mathrm{d}p(\tau)}{\mathrm{d}\tau} = \dot{p}\,(\tau_1(\tau), \tau_2(\tau)) = \frac{\partial p}{\partial \tau_1} \cdot \frac{\mathrm{d}\tau_1}{\mathrm{d}\tau} + \frac{\partial p}{\partial \tau_2} \cdot \frac{d\tau_2}{\mathrm{d}\tau}$$

$$\dot{p}(\tau) = \vec{p}_{\tau_1} \cdot \dot{\tau}_1 + \vec{p}_{\tau_2} \cdot \dot{\tau}_2$$

In einem festen Punkt $p_0 = p(\tau_0) = p\left(\tau_1(\tau_0), \tau_2(\tau_0)\right)$ ist die Tangente an die Flächenkurve K_F somit eine Linearkombination der Vektoren

$$\vec{p}_{\tau_1}(\tau_0) \text{ und } \vec{p}_{\tau_2}(\tau_0),$$

die für diesen Punkt p_0 fest definiert sind. Nur die Koeffizienten $\dot{\tau}_1$, $\dot{\tau}_2$ sind von der gewählten Flächenkurve abhängig.

Alle Tangenten an beliebige Flächenkurven durch einen festen Punkt $p_0 = p\left(\tau_1(\tau_0), \tau_2(\tau_0)\right)$ auf F liegen also in einer Ebene, die durch die beiden Vektoren

$$\vec{p}_{\tau_1} = \left.\frac{\partial p}{\partial \tau_1}\right|_{(\tau_1,\tau_2)} \quad \text{und} \quad \vec{p}_{\tau_2} = \left.\frac{\partial p}{\partial \tau_2}\right|_{(\tau_1,\tau_2)}$$

aufgespannt wird.

Diese Ebene heißt **Tangentialebene:** $\quad E_T = E\left(p_0, \vec{p}_{\tau_1}, \vec{p}_{\tau_2}\right) = E\left(p_0, \vec{f}\right).$

Dabei ist $\vec{f}$ der **Flächennormalenvektor** (Normalenvektor der Tangentialebene):

$$\vec{f} = \frac{\vec{p}_{\tau_1} \times \vec{p}_{\tau_2}}{|\vec{p}_{\tau_1} \times \vec{p}_{\tau_2}|}$$

(Diese Beziehungen gelten nur für reguläre Punkte, d. h. $\vec{p}_{\tau_1} \times \vec{p}_{\tau_2} \neq \boldsymbol{\mathit{0}}$.)

Damit lässt sich der **Schnittwinkel zweier Flächenkurven** definieren als Schnittwinkel der beiden Tangenten im Schnittpunkt.

$$\begin{array}{rclcll} \vec{\boldsymbol{t}}_1 & = & \alpha_1 \vec{p}_{\tau_1} & + & \alpha_2 \vec{p}_{\tau_2} & \quad \text{1. Tangentenrichtung} \\ \vec{\boldsymbol{t}}_2 & = & \beta_1 \vec{p}_{\tau_1} & + & \beta_2 \vec{p}_{\tau_2} & \quad \text{2. Tangentenrichtung} \end{array}$$

Dann gilt für den Winkel φ zwischen beiden Vektoren:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{\boldsymbol{t}}_1 \cdot \vec{\boldsymbol{t}}_2}{\left|\vec{\boldsymbol{t}}_1\right| \cdot \left|\vec{\boldsymbol{t}}_2\right|}$$

$$\begin{aligned} \vec{\boldsymbol{t}}_1 \cdot \vec{\boldsymbol{t}}_2 &= \alpha_1\beta_1 \left|\vec{p}_{\tau_1}\right|^2 + \alpha_1\beta_2 \langle \vec{p}_{\tau_1}, \vec{p}_{\tau_2} \rangle + \alpha_2\beta_1 \langle \vec{p}_{\tau_2}, \vec{p}_{\tau_1} \rangle + \alpha_2\beta_2 \left|\vec{p}_{\tau_2}\right|^2 \\ \left|\vec{\boldsymbol{t}}_1\right|^2 &= \alpha_1^2 \left|\vec{p}_{\tau_1}\right|^2 + 2\alpha_1\alpha_2 \langle \vec{p}_{\tau_1}, \vec{p}_{\tau_2} \rangle + \alpha_2^2 \left|\vec{p}_{\tau_2}\right|^2 \\ \left|\vec{\boldsymbol{t}}_2\right|^2 &= \beta_1^2 \left|p_{\tau_1}\right|^2 + 2\beta_1\beta_2 \langle \vec{p}_{\tau_1}, \vec{p}_{\tau_2} \rangle + \beta_2^2 \left|\vec{p}_{\tau_2}\right|^2 \end{aligned}$$

Mit den Bezeichnungen

$$g_{11} = \left|\vec{p}_{\tau_1}\right|^2, \; g_{22} = \left|\vec{p}_{\tau_2}\right|^2, \; g_{12} = g_{21} = \vec{p}_{\tau_1} \cdot \vec{p}_{\tau_2}$$

gilt folglich:

$$\cos\varphi = \frac{\sum\limits_{i,j} \alpha_i \beta_j g_{ij}}{\sqrt{\sum\limits_{i,j} \alpha_i \alpha_j g_{ij}} \sqrt{\sum\limits_{i,j} \beta_i \beta_j g_{ij}}}$$

Der folgende Ausdruck heißt **Maßtensor** oder **metrischer Tensor**:

$$G = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Wir betrachten die Differentiale für eine Flächenkurve K_F, die in Abhängigkeit von der Bogenlänge s anstelle eines beliebigen Parameters τ definiert sei:

$$K_F : \quad p\,(\tau_1(s), \tau_2(s))$$

Dann gilt für das Bogenelement ds:

$$\mathrm{d}s^2 \;=\; \langle \mathrm{d}\vec{p}, \mathrm{d}\vec{p}\rangle \qquad \text{(wegen: } \left|\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}s}\right|^2 \;=\; 1\ \text{)}$$

$$\mathrm{d}s^2 \;=\; \left(\frac{\partial p}{\partial \tau_1}\mathrm{d}\tau_1 + \frac{\partial p}{\partial \tau_2}\mathrm{d}\tau_2\right)^2, \qquad \text{wobei } (\,.\,)^2 = \langle\,.\,,\,.\,\rangle$$

Man nennt die so gebildete quadratische Form

$$\boxed{\mathrm{d}s^2 \;=\; g_{11}\mathrm{d}\tau_1^2 + 2g_{12}\mathrm{d}\tau_1\mathrm{d}\tau_2 + g_{22}\mathrm{d}\tau_2^2}$$

erste Grundform der Flächentheorie oder **metrische Grundform der Flächentheorie**.
Sind $\vec{\boldsymbol{t}}_1, \vec{\boldsymbol{t}}_2$ die Tangentenvektoren der Gaußschen Koordinatenlinien, so gilt:

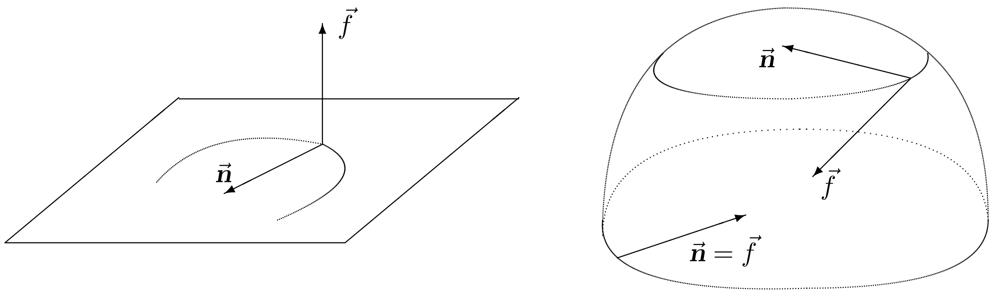
$$\cos\,\hat{}\,(\vec{\boldsymbol{t}}_1, \vec{\boldsymbol{t}}_2) \;=\; \cos\,\hat{}\,(\vec{p}_{\tau_1}, \vec{p}_{\tau_2}) \;=\; \frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11}g_{22}}} \tag{10}$$

In einem gegebenen Punkt schneiden sich die Koordinatenlinien rechtwinklig, genau dann wenn für diesen Punkt $g_{12} = 0$ gilt. Wenn dies für alle Punkte auf F gilt, dann liegt ein rechtwinkliges Gaußsches Koordinatensystem auf F vor.

5.5 Krümmung einer Fläche

Wir betrachten zunächst das Krümmungsverhalten von Flächenkurven.

Der Flächennormalenvektor $\vec{f} = \dfrac{\vec{p}_{\tau_1} \times \vec{p}_{\tau_2}}{|\vec{p}_{\tau_1} \times \vec{p}_{\tau_2}|}$ in einem Punkt p_0 liegt stets in der Normalenebene einer (jeden!) Flächenkurve durch p_0, ist aber nicht notwendig mit dem Hauptnormalenvektor $\vec{\boldsymbol{n}}$ identisch.



Wir betrachten eine Flächenkurve K_F auf der Fläche F:

$$\begin{aligned} F &= \{p : \, x_j = x_j(\tau_1, \tau_2),\ j = 1,2,3\} \\ K_F &= \{p \in F : \, \tau_1 = \tau_1(\tau),\ \tau_2 = \tau_2(\tau)\} \end{aligned}$$

Für Tangentenrichtung bzw. Hauptnormale der Kurve gilt:

$$\vec{\boldsymbol{t}}_K \;=\; \vec{p}_{\tau_1} \cdot \frac{\mathrm{d}\tau_1}{\mathrm{d}\tau} + \vec{p}_{\tau_2} \cdot \frac{\mathrm{d}\tau_2}{\mathrm{d}\tau}$$

$$\vec{\boldsymbol{n}}_K = \frac{1}{\varkappa_K} \cdot \frac{\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{t}}_K}{\mathrm{d}s}, \qquad \varkappa_K = \frac{\mathrm{d}\vec{\tau}_K}{\mathrm{d}s} \quad \text{(Krümmung der Kurve } K_F\text{)}$$

Unter Beachtung von (9) und (10) folgt

$$\begin{aligned} |\vec{p}_{\tau_1} \times \vec{p}_{\tau_2}|^2 &= |\vec{p}_{\tau_1}|^2 \cdot |\vec{p}_{\tau_2}|^2 \cdot \sin^2 \sphericalangle (\vec{p}_{\tau_1}, \vec{p}_{\tau_2}) \\ &= g_{11} \cdot g_{22} \cdot \frac{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}{g_{11}g_{22}} \\ &= g_{11}g_{22} - g_{12}^2 \\ &= \det G \end{aligned}$$

und somit gilt für den Flächennormalenvektor

$$\vec{f} = \frac{1}{\sqrt{g}} (\vec{p}_{\tau_1} \times \vec{p}_{\tau_2}), \qquad g = \det G$$

$$\begin{aligned} \left\langle \vec{f}, \vec{\boldsymbol{n}}_K \right\rangle &= \left|\vec{f}\right| \cdot |\vec{\boldsymbol{n}}_K| \cdot \cos \sphericalangle \left(\vec{f}, \vec{\boldsymbol{n}}_K\right) = \cos \sphericalangle \left(\vec{f}, \vec{\boldsymbol{n}}_K\right) & (11) \\ \varkappa_K \cdot \vec{\boldsymbol{n}}_K &= \frac{\mathrm{d}t_K}{\mathrm{d}s} = \sum_{i,j} \vec{p}_{\tau_i\tau_j} \frac{\mathrm{d}\tau_i}{\mathrm{d}s} \frac{\mathrm{d}\tau_j}{\mathrm{d}s} \\ \varkappa_K \cdot \left\langle \vec{f}, \vec{\boldsymbol{n}}_K \right\rangle &= \left\langle \vec{f}, \sum_{i,j} \vec{p}_{\tau_i\tau_j} \frac{\mathrm{d}\tau_i}{\mathrm{d}s} \frac{\mathrm{d}\tau_j}{\mathrm{d}s} \right\rangle = \frac{\sum_{i,j} h_{ij} \mathrm{d}\tau_i \mathrm{d}\tau_j}{\mathrm{d}s^2} & (12) \\ &= \frac{\sum_{i,j} h_{ij} \mathrm{d}\tau_i \mathrm{d}\tau_j}{\sum_{i,j} g_{ij} \mathrm{d}\tau_i \mathrm{d}\tau_j}; \qquad \text{mit } h_{ij} = \left\langle \vec{f}, \vec{p}_{\tau_i\tau_j} \right\rangle & (13) \end{aligned}$$

Der Ausdruck

$$\boxed{\sum_{i,j} h_{ij} \mathrm{d}\tau_i \mathrm{d}\tau_j = h_{11} (\mathrm{d}\tau_1)^2 + 2h_{12} \mathrm{d}\tau_1 \mathrm{d}\tau_2 + h_{22} (\mathrm{d}\tau_2)^2}$$

heißt ***2. Grundform der Flächentheorie***.

Bemerkung: Während die Größen $\varkappa_K$ und $\vec{\boldsymbol{n}}_K$ der linken Seite von (12) von der konkreten Gestalt der Flächenkurve K_F im betrachteten Punkt p_0 abhängen (Krümmungsverhalten), ist der Quotient (13) nur von der Tangentenrichtung der Kurve K_F abhängig.

Die Zahl

$$\varkappa_n = \varkappa_K \cdot \cos \sphericalangle \left(\vec{f}, \vec{\boldsymbol{n}}_K\right) = \frac{\sum_{i,j} h_{ij} \mathrm{d}\tau_i \mathrm{d}\tau_j}{\sum_{i,j} g_{ij} \mathrm{d}\tau_i \mathrm{d}\tau_j}$$

heißt ***Normalkrümmung*** der Fläche F im Punkt p_0 bezüglich der Tangentenrichtung der Kurve K_F.

Der Vektor $\vec{k}_n = \varkappa_n \cdot \vec{f}$ ist der ***Normalkrümmungsvektor***.

Der Krümmungsvektor $\vec{p}_0''$ einer Flächenkurve K_F lässt sich in zwei Komponenten zerlegen:

$$\vec{p}_0'' = \varkappa_n \vec{f} + \vec{k}_0$$

Der Wert $\left|\vec{k}_0\right| = \varkappa_g$ ist die ***geodätische Krümmung*** von K_F. Es gilt $\varkappa_K^2 = \varkappa_n^2 + \varkappa_g^2$.

Die Normalkrümmung $\varkappa_n$ hat unterschiedliche Werte für verschiedene Kurven (mit unterschiedlicher Tangentenrichtung) durch P_0. Die dabei auftretenden Extremalwerte λ_1, λ_2 heißen ***Hauptkrümmungen***. Die zu den Extremalwerten gehörenden Tangentenrichtungen (von Flächenkurven durch P_0) sind die ***Hauptkrümmungsrichtungen***.

Eine Flächenkurve, bei der in jedem Kurvenpunkt Tangenten- und Hauptkrümmungsrichtung zusammenfallen, ist eine ***Krümmungslinie***.

Es gibt weiterhin folgende spezielle Bezeichnungen:

Gaußsche Krümmung:

$$K = \lambda_1 \cdot \lambda_2 = \frac{h_{11}h_{22} - h_{12}^2}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}$$

mittlere Krümmung:

$$H = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} = \frac{h_{11}g_{22} - 2h_{12}g_{12} + h_{22}g_{11}}{2\left(g_{11}g_{22} - g_{12}^2\right)}$$

Einige Spezialfälle:

$K(P_0) = 0;\ \lambda_1 = \lambda_2 = 0$	$\Longrightarrow$	Flachpunkt (Ebene)
$K(P_1) = 0;\ \lvert\lambda_1\rvert + \lvert\lambda_2\rvert \neq 0$	$\Longrightarrow$	parabolischer Punkt (z. B. Seitenpunkt auf Reifen)
$K(P_2) > 0;\ h_{11}h_{22} - h_{12}^2 > 0$	$\Longrightarrow$	elliptischer Punkt (z. B. Lauffläche auf Reifen)
$K(P_3) < 0$	$\Longrightarrow$	hyperbolischer Punkt (Sattelpunkt, z. B. Felge)