Skript zur Vorlesung

Mathematik I

für Wirtschaftsinformatiker

WS 2005/2006

Peter Junghanns

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Grundbegriffe der Mengenlehre und Logik

1.1 Mengen

Unter einer **Menge** verstehen wir eine **Zusammenfassung wohldefinierter Objekte**. Diese Objekte können z.B. Zahlen, n-Tupel von Zahlen oder Funktionen sein. Natürlich können wir auch Dinge des alltäglichen Lebens zu Mengen zusammenfassen. Das Adjektiv **wohldefiniert** soll ausdrücklich darauf hinweisen, dass die zu betrachtenden Objekte durch Eigenschaften charakterisiert sind, die eine eindeutige Entscheidung dahingehend ermöglichen, ob ein vorliegendes Objekt zur Menge gehört oder nicht.

Mengen werden wir in der Regel mit großen lateinischen Buchstaben $A, B, C, \ldots$, Schattenbuchstaben $\mathbb{N}, \mathbb{R}, \mathbb{Z}, \ldots$ oder kaligrafischen Buchstaben $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \ldots$ bezeichnen, die Elemente der Menge (also die Objekte) dagegen mit kleinen Buchstaben, $a \in A$. Die Beschreibung einer Menge kann durch die Aufzählung ihrer Elemente erfolgen, wie z.B. bei der Menge $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$ der natürlichen Zahlen oder der Menge $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$ der ganzen Zahlen. Oft werden jedoch (weil z.B. eine Aufzählung nicht möglich ist) Mengen dadurch beschrieben, dass man Elemente eines gewissen **Grundbereiches** durch Eigenschaften auszeichnet, z.B.

$M = \{x \in \mathbb{R} : a \le x < b\} =: [a, b)$ - halboffenes Intervall.

Hier spielt $\mathbb{R}$ (Menge der reellen Zahlen) die Rolle des Grundbereiches, und die Eigenschaften der Menge M werden mit Hilfe der Ungleichheitsrelation im Bereich der reellen Zahlen beschrieben. Mit $\emptyset$ bezeichnen wir die **leere Menge**, die kein Element enthält.

Für beliebige Mengen A und B erklären wir nun die **Mengenrelationen**

- $A \subset B \Leftrightarrow (x \in A \Rightarrow x \in B)$

  Ausführlich: Wir sagen, dass A **Teilmenge von** B ist, genau dann, wenn aus der Tatsache, dass x **Element von** A ist, stets folgt, dass x auch **Element von** B ist.

- $A = B \Leftrightarrow (A \subset B \text{ und } B \subset A)$

und die **Mengenoperationen**

- **Vereinigung** $A \cup B := \{x : x \in A \text{ oder } x \in B\}$
- **Durchschnitt** $A \cap B := \{x : x \in A \text{ und } x \in B\}$
- **Differenz** $A \setminus B := \{x : x \in A \text{ und } x \notin B\}$
- **Kreuzprodukt** $A \times B := \{(x, y) : x \in A \text{ und } y \in B\}$ (geordnete Paare)
- $n \in \mathbb{N}\,,\; n > 1 : A^n := A \times (A^{n-1})\,,\; A^1 := A$

Man schreibt z.B. für $A^3 = \big\{(a,(b,c)) : a \in A,\ (b,c) \in A^2\big\}$ auch $\{(a,b,c) : a,b,c \in A\}$ (Menge gordneter Tripel) und allgemein $A^n = \{(x_1,\ldots,x_n) : x_j \in A,\ j = 1,\ldots,n\}$ (Menge geordneter n-Tupel).

Ist $A \subset G$, so nennt man $\overline{A}^G = \overline{A} := G \setminus A$ das **Komplement** (die **Komplementärmenge**) von A bezüglich der Grundmenge G.

Zwei Mengen A und B mit der Eigenschaft $A \cap B = \emptyset$ nennt man **durchschnittsfremd** bzw. **disjunkt**.

Beispiel 1.1 $\mathbb{R}^2\,,\ \mathbb{R}^3\,,\ \ldots$

Beispiel 1.2 *Die Normalparabel, d.h. der Graph der Funktion* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\,,\ x \mapsto x^2$, *ist gegeben durch* $\{(x,x^2) : x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$. *(Lies: Menge der geordneten Paare* (x,x^2), *wobei* x *die Menge der reellen Zahlen durchläuft.)*

Beispiel 1.3 *Mit* $(m)\,,\ m \in \mathbb{N}$, *bezeichnen wir die Menge aller durch* m *teilbaren ganzen Zahlen. So ist also* (2) *die Menge aller geraden und* $\mathbb{Z} \setminus (2)$ *die Menge aller ungeraden Zahlen. Ferner gilt* $(1) = \mathbb{Z}$ *und z.B.* $(2) \cap (3) = (6)$ *sowie* $(10) \subset (5)$. *Dagegen ist* $(2) \cup (3)$ *die Menge der Zahlen, die durch* 2 *oder durch* 3 *teilbar sind, und* $((2) \cup (3)) \setminus (6)$ *die Menge der Zahlen, die entweder durch* 2 *oder durch* 3 *teilbar sind.*

Beachte: Für jede Menge A gilt $A \subset A$ und $\emptyset \subset A$.

Es sei M eine beliebige Menge. Mit $\mathcal{P}(M)$ bezeichnen wir die Menge aller Teilmengen von M, die sogenannte **Potenzmenge** von M. Es gilt also stets $\emptyset \in \mathcal{P}(M)$ und $M \in \mathcal{P}(M)$.

Beispiel 1.4 $\mathcal{P}(\{1,2,3\}) = \Big\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{2,3\}, \{1,3\}, \{1,2,3\}\Big\}$

Zur Beschreibung von Mengen, aber auch zur Formulierung von Aussagen werden oft die sog. **Quantoren** verwendet. Das sind der **Allquantor** $\forall$ ("für alle") sowie die **Existenzquantoren** $\exists$ ("es existiert (mindestens) ein") und $\exists!$ ("es existiert genau ein").

1.2 Abbildungen

Es seien A und B zwei Mengen. Unter einer **Abbildung** (bzw. **Funktion**) $f : A \longrightarrow B$, $a \mapsto f(a)$ von A nach B verstehen wir eine Vorschrift, die jedem $a \in A$ genau ein $b \in B$ mittels der Vorschrift $b = f(a)$ zuordnet. Dabei nennt man b das **Bild** von a unter der Abbildung f, a heißt **Urbild** von b bezüglich der Abbildung f. Unter dem **Graphen** der Abbildung f versteht man die Menge $\{(a, f(a)) : a \in A\} \subset A \times B$.

Ist $M \subset A$, so heißt $f(M) := \{b \in B : \exists a \in M \text{ mit } f(a) = b\} = \{f(a) : a \in M\}$ das **Bild der Menge** M unter der Abbildung f. Für $N \subset B$ nennen wir $f^{-1}(N) := \{a \in A : f(a) \in N\}$ das **vollständige Urbild der Menge** N bezüglich der Abbildung f.

Beispiel 1.5 *Für die Abbildung $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ gilt z.B. $f([0, 2)) = [0, 4) = f([-1, 2))$, $f^{-1}([0, 4)) = (-2, 2)$ und $f^{-1}((-1, 0)) = \emptyset$.*

Beachte: Es ist möglich, dass $f^{-1}(N) = \emptyset$ gilt, obwohl N nicht leer ist.

Beispiel 1.6 *Eine Abbildung $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ nennt man (reelle) Zahlenfolge und schreibt dafür $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ oder $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, wobei $a_n = f(n)$ zu setzen ist.*

Beispiel 1.7 *Unter der* **identischen Abbildung auf der Menge** *A versteht man die Abbildung $id_A : A \longrightarrow A$, $a \mapsto a$, d.h. es gilt $id_A(a) = a$ für alle $a \in A$.*

Definition 1.8 *Eine Abbildung $f : A \longrightarrow B$ heißt*

- **surjektiv**, *wenn $f(A) = B$ gilt,*
- **injektiv**, *wenn aus $a_1, a_2 \in A$ und $f(a_1) = f(a_2)$ stets $a_1 = a_2$ folgt,*
- **bijektiv**, *wenn f surjektiv und injektiv ist.*

Diese drei Eigenschaften kann man auch äquivalent wie folgt beschreiben (mit $\#A$ bezeichnen wir die Anzahl der Elemente einer Menge A):

$$\begin{array}{ll} \text{Surjektivität:} & \#f^{-1}(\{b\}) \geq 1 \ \forall\, b \in B \\ \text{Injektivität:} & \#f^{-1}(\{b\}) \leq 1 \ \forall\, b \in B \\ \text{Bijektivität:} & \#f^{-1}(\{b\}) = 1 \ \forall\, b \in B \end{array}$$

Die Abbildung aus Beispiel 1.5 ist also weder surjektiv noch injektiv. Aber die Abbildung $f : \mathbb{R} \longrightarrow [0, \infty)$, $x \mapsto x^2$ ist surjektiv und die Abbildung $f : [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$, $x \mapsto x^2$ sogar bijektiv.

Sind uns mehrere Abbildungen $f : A \longrightarrow B$, $g : B \longrightarrow C$ und $h : C \longrightarrow D$ gegeben, so können wir diese miteinander verknüpfen. Z.B. ist $g \circ f : A \longrightarrow C$ definiert durch $(g \circ f)(a) = g(f(a))$ $\forall a \in A$. Für diese Verknüpfung gilt das Assoziativgesetz: $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

Satz 1.9 *Für eine Abbildung $f : A \longrightarrow B$ existiert genau dann eine Abbildung $g : B \longrightarrow A$ mit den Eigenschaften $g \circ f = id_A$ und $f \circ g = id_B$, wenn f bijektiv ist.*

Ist die Bedingung von Satz 1.9 erfüllt, so nennt man $g : B \longrightarrow A$ die **Umkehr-** oder **inverse Abbildung** zu $f : A \longrightarrow B$ und bezeichnet sie mit f^{-1}. Es gilt also $f^{-1}(f(a)) = a \ \forall a \in A$ und $f(f^{-1}(b)) = b \ \forall b \in B$.

Satz 1.10 *Sind die Abbildungen $f : A \longrightarrow B$ und $g : B \longrightarrow C$ beide surjektiv (injektiv, bijektiv), so gilt dies auch für $g \circ f : A \longrightarrow C$.*

Beispiel 1.11 *Die Menge aller bijektiven Abbildungen der Menge $\{1, 2, \ldots, n\}$ der ersten n natürlichen Zahlen auf sich selbst, auch* **Permutationen** *der Ordnung n genannt, bezeichnen wir mit S_n. Wir verwenden dabei folgende Schreibweise: Ein $\sigma \in S_4$ schreiben wir z.B. in der Form*

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix},$$

was ausführlich geschrieben

$$\sigma(1) = 3, \quad \sigma(2) = 1, \quad \sigma(3) = 2 \quad \textit{und} \quad \sigma(4) = 4$$

bedeutet. Es gilt nun

$$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Für

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \textit{und} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

erhalten wir

$$\sigma_2 \circ \sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \textit{und} \quad \sigma_1 \circ \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix},$$

was zeigt, dass die Verknüpfung "$\circ$" i.a. **nicht** *kommutativ ist, auch wenn der Bildbereich B mit dem Urbildbereich A zusammenfällt.*

1.3 Relationen

Es seien n Mengen $M_1, \ldots, M_n$ gegeben. Unter einer **n-nären Relation** R zwischen diesen Mengen versteht man eine Teilmenge $R \subset M_1 \times M_2 \times \cdots \times M_n$. Wir wollen uns hier speziell mit binären Relationen $R \subset M_1 \times M_2$ befassen. Wir sagen dann, dass ein Element $x \in M_1$ in Relation R zu $y \in M_2$ steht, in Zeichen $x \overset{R}{\sim} y$, genau dann, wenn $(x, y) \in R$ gilt.

Bemerkung 1.12 *Abbildungen (vgl. Abschnitt 1.2) bzw. ihre Graphen sind also spezielle Relationen.*

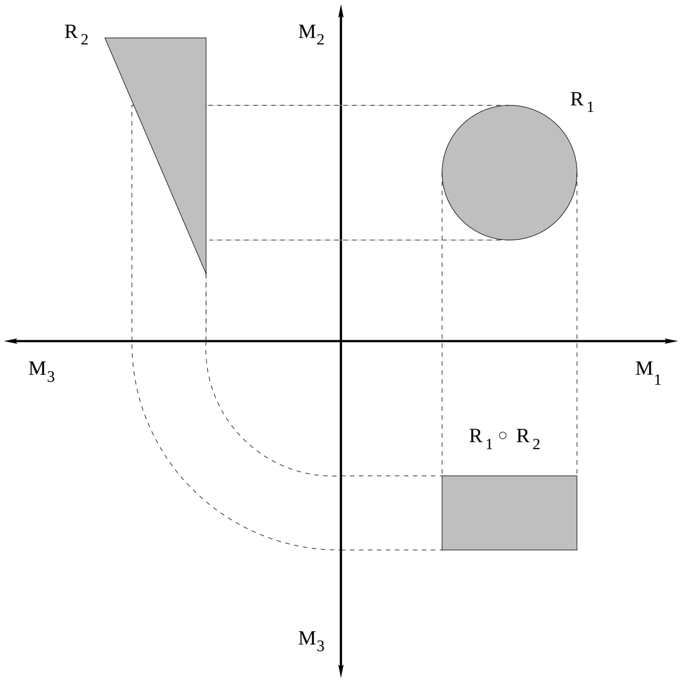
Beispiel 1.13 *Es seien P die Produktpalette eines Betriebes und F die Menge der Verkaufsfilialen für diese Produkte. Die Relation*

$$R_1 = \{(p, f) \in P \times F : p \text{ wird in } f \text{ angeboten}\}$$

beschreibt dann das Angebot in den Filialen.

Sind $R_1 \subset M_1 \times M_2$ und $R_2 \subset M_2 \times M_3$ zwei Relationen, so kann man die Komposition $R_1 \circ R_2$ (Verknüpfung oder auch Produkt) dieser beiden Relationen definieren:

$$R_1 \circ R_2 := \{(a,c) \in M_1 \times M_3 : \exists\, b \in M_2 \text{ mit } (a,b) \in R_1 \text{ und } (b,c) \in R_2\}\ .$$



Zur Definition der Komposition $R_1 \circ R_2$ zweier Relationen

Beispiel 1.14 *Neben der Relation R_1 aus Bsp. 1.13 betrachten wir die Menge B der Verkaufsbelege der Filialen des Jahres x und die Relation*

$$R_2 = \{(f,b) \in F \times B : b \text{ wurde in } f \text{ ausgestellt}\}\ .$$

Dann beschreibt die Relation $R_1 \circ R_2$ die Produktnachfrage im Jahr x.

Für eine **Relation** $R \subset M \times M$ in einer Menge M kann man verschiedene Eigenschaften erklären. Man nennt die Relation $R \subset M \times M$

(r) **reflexiv**, wenn $(x,x) \in R\ \forall x \in M$,

(s) **symmetrisch**, wenn aus $(x,y) \in R$ stets $(y,x) \in R$ folgt,

(t) **transitiv**, wenn aus $(x,y) \in R$ und $(y,z) \in R$ stets $(x,z) \in R$ folgt,

(a) **antisymmetrisch**, wenn aus $(x,y) \in R$ und $(y,x) \in R$ stets $x = y$ folgt.

Wir nennen eine Relation $R \subset M \times M$ eine **Äquivalenzrelation**, wenn sie reflexiv, symmetrisch und transitiv ist.

Beispiel 1.15 $M = \mathbb{R}$, $I_{\mathbb{R}} = \{(x,x) : x \in \mathbb{R}\}$ (*Diagonale von* $\mathbb{R}^2$) - *Gleichheitsrelation*

Definiert man für eine Relation $R \subset M \times N$ die sog. **inverse Relation**

$$R^{-1} := \{(n,m) \in N \times M : (m,n) \in R\} ,$$

so gilt

$$R \circ R^{-1} \supset I_M \text{ genau dann, wenn } \{m \in M : \exists\, n \in N \text{ mit } (m,n) \in R\} = M ,$$

$$R^{-1} \circ R \supset I_N \text{ genau dann, wenn } \{n \in N : \exists\, m \in M \text{ mit } (m,n) \in R\} = N .$$

Betrachtet man die Graphen zweier Funktionen $f : A \longrightarrow B$ und $g : B \longrightarrow C$ als Relationen $R_f = \{(a, f(a)) : a \in A\} \subset A \times B$ und $R_g = \{(b, g(b)) : b \in B\} \subset B \times C$, so ist $R_f \circ R_g = R_{g \circ f}$ gleich dem Graphen der verketteten Abbildung $g \circ f$.

Satz 1.16 *Für beliebige Relationen $R \subset M_1 \times M_2$ und $S \subset M_2 \times M_3$ gilt*

$$(R^{-1})^{-1} = R \quad \text{und} \quad (R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1} .$$

Beispiel 1.17 $M = \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$, $R = \{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 : x - y \in (m)\}$, *d.h. x steht in Relation zu y genau dann, wenn x und y bei Division durch m den gleichen Rest lassen.*

Es sei $R \subset M \times M$ eine Äquivalenzrelation. Für $x \in M$ definieren wir die zugehörige **Äquivalenzklasse** $[x]_R$ (oder auch nur mit $[x]$ bezeichnet) wie folgt: $[x] := \{y \in M : (x,y) \in R\}$. Das Element $x \in M$ heißt Repräsentant der Äquivalenzklasse $[x]$. Es gilt nun:

(A1) $[x] = [y] \Leftrightarrow (x,y) \in R$.

Beweis. Ist $[x] = [y]$, so ist $y \in [x]$, also $(x,y) \in R$. Umgekehrt, folgt unter Verwendung der Transitivitätseigenschaft (t) aus $(x,y) \in R$ und $z \in [x]$, d.h. $(z,x) \in R$, auch $(z,y) \in R$, also $z \in [y]$. Damit ist $[x] \subset [y]$. Analog folgt (durch Vertauschen der Rollen von x und y) $[y] \subset [x]$. $\square$

(A2) $[x] \cap [y] \neq \emptyset \Rightarrow [x] = [y]$.

Beweis. Es sei $z \in [x] \cap [y]$, also $(x,z) \in R$ und $(z,y) \in R$. Es folgt $(x,y) \in R$ und somit nach (A1) $[x] = [y]$. $\square$

(A3) Aus (A1) und (A2) folgt: Jedes $x \in M$ liegt in genau einer Äquivalenzklasse. Man sagt: Eine Äquivalenzrelation auf M erzeugt eine **Zerlegung** von M in paarweise disjunkte, nichtleere Teilmengen, nämlich die Äquivalenzklassen. Eine solche Zerlegung wird auch **Partition** von M genannt.

Es gilt auch die Umkehrung:

(A4) Jede Partition P von M, d.h.

$$P \subset \mathcal{P}(M) ,\ \emptyset \notin P ,\ \bigcup_{A \in P} A = M \text{ und } A \cap B = \emptyset \text{ für } A, B \in P \text{ mit } A \neq B ,$$

erzeugt eine Äquivalenzrelation auf M, und zwar durch die Definition

$$x \sim y \ \Leftrightarrow_{\text{def}}\ \exists A \in P : x \in A \text{ und } y \in A .$$

(Für ":" lies "so dass"!)

Im Beispiel 1.15 bestehen die Äquivalenzklassen aus genau einem Element. Die Äquivalenzklassen im Beispiel 1.17 sind die **Restklassen modulo** (m), $[0]_m$, $[1]_m$, ..., $[m-1]_m$.

1.4 Grundlegende Eigenschaften der Menge der reellen Zahlen

Wir verwenden folgende Bezeichnungen, die z.T. auch schon in den vorangegangenen Abschnitten aufgetreten sind:

- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ - Menge der natürlichen Zahlen, $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$
- $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$ - Menge der ganzen Zahlen
- $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z},\, n \in \mathbb{N} \right\}$ - Menge der rationalen Zahlen
- $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ - Menge der reellen Zahlen

Strukturelle Eigenschaften:
Auf der Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen sind zwei binäre Verknüpfungen erklärt, die Addition $+ : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ (d.h. einem geordneten Paar $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ reeller Zahlen wird sie Summe $a + b \in \mathbb{R}$ zugeordnet) und die Multiplikation $\cdot : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ (d.h. einem geordneten Paar $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ reeller Zahlen wird das Produkt $a \cdot b = ab \in \mathbb{R}$ zugeordnet). Diese binären Verknüpfungen haben folgende Eigenschaften (bzw. genügen folgenden Axiomen):

($\mathrm{A_K}$) $a + b = b + a \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$ - Kommutativgesetz der Addition

($\mathrm{A_A}$) $a + (b + c) = (a + b) + c \quad \forall a, b, c \in \mathbb{R}$ - Assoziativgesetz der Addition

($\mathrm{A_N}$) $0 + a = a + 0 = a \quad \forall a \in \mathbb{R}$ - Existenz eines Nullelementes

($\mathrm{A_E}$) $\forall a \in \mathbb{R}\ \exists x \in \mathbb{R} : a + x = 0$ - Existenz des entgegengesetzen Elementes, Bez. $x = -a$

($\mathrm{M_K}$) $ab = ba\ \forall a, b \in \mathbb{R}$ - Kommutativgesetz der Multiplikation

($\mathrm{M_A}$) $a(bc) = (ab)c \quad \forall a, b, c \in \mathbb{R}$ - Assoziativgesetz der Multiplikation

($\mathrm{M_E}$) $1a = a1 = a \quad \forall a \in \mathbb{R}$ - Existenz eines Einselementes

($\mathrm{M_I}$) $\forall a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\ \exists x \in \mathbb{R} : ax = 1$ - Existenz des inversen Elementes, Bez. $x = \frac{1}{a} = a^{-1}$

(D) $a(b + c) = ab + ac \quad \forall a, b, c \in \mathbb{R}$ - Distributivgesetz

(N) $0 \neq 1$

- Wir bemerken, dass man eine Menge mit diesen strukturellen Eigenschaften einen **Körper** nennt und dass das Nullelement sowie das Einselement eindeutig bestimmt sind. Gleiches gilt für das entgegengesetzte und das inverse Element. Ferner gilt $0a = 0$ und $(-1)a = -a$ für alle $a \in \mathbb{R}$.
- Man kann durch $a - b := a + (-b)$ und $\frac{a}{b} = a\,\frac{1}{b}$ $(b \neq 0)$ die Subtraktion und Division erklären.
- Aus $ab = 0$ folgt stets, dass wenigstens eine der beiden Zahlen a oder b gleich 0 ist.

Ordnungseigenschaften:
Für zwei reelle Zahlen a und b gilt genau eine der Beziehungen

$$a < b\,, \quad a = b\,, \quad b < a \text{ (bzw. } a > b)\,,$$

wobei wir $0 < 1$ vereinbaren und bzgl. der binären Verknüpfungen die folgenden Aussagen gelten:

($\mathrm{O_A}$) $a < b \;\Rightarrow\; a + c < b + c \quad \forall c \in \mathbb{R}$

($\mathrm{O_M}$) $a < b \;\Rightarrow\; ac < bc \quad \forall c > 0$

Weiterhin gilt

($\mathrm{O_T}$) $a < b\,,\; b < c \;\Rightarrow\; a < c$

Weitere Regeln lassen sich ableiten:

(1) $a > 0\,,\; b > 0 \;\Rightarrow\; a + b > 0$ und $ab > 0$

(2) $a > 0 \;\Leftrightarrow\; -a < 0$

(3) $a \neq 0 \;\Rightarrow\; aa > 0$

(4) $a < b\,,\; c < d \;\Rightarrow\; a + c < b + d$

(5) $0 < a < b\,,\; 0 < c < d \;\Rightarrow\; 0 < ac < bd$

(6) $a > 0\,,\; b < 0 \;\Rightarrow\; ab < 0$

(7) $a < 0\,,\; b < 0 \;\Rightarrow\; ab > 0$

(8) $0 < a < b \;\Rightarrow\; 0 < b^{-1} < a^{-1}$

(9) $0 > a > b \;\Rightarrow\; 0 > b^{-1} > a^{-1}$

Dichtheit der Menge der reellen Zahlen:
Zwischen zwei verschiedenen reellen Zahlen existiert stets eine weitere reelle Zahl:

$$a, b \in \mathbb{R}\,,\; a < b \;\Rightarrow\; \exists\, c \in \mathbb{R} : a < c < b\,.$$

Vollständigkeit der Menge der reellen Zahlen:
Für zwei Folgen $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ und $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ reeller Zahlen mit den Eigenschaften

$$a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} (b_n - a_n) = 0$$

(d.h. $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{R} : |b_n - a_n| < \varepsilon\ \forall n \geq N$) existiert stets genau eine reelle Zahl c mit $a_n \leq c \leq b_n\ \forall n \in \mathbb{N}$. Es gilt also das Intervallschachtelungsprinzip. Es sei bemerkt, dass dies in der Menge der rationalen Zahlen nicht der Fall ist.

Archimedessches Axiom: $\forall a \in \mathbb{R}\ \exists n \in \mathbb{N} : n > a$

Dieses Axiom lässt sich nicht aus den bisher dargelegten Eigenschaften der reellen Zahlen herleiten und kann auch in der Form

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n} < \varepsilon$$

geschrieben werden.

Das **Prinzip der vollständigen Induktion**:
Die Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen ist die kleinste Menge reeller Zahlen mit den Eigenschaften

(N1) $1 \in \mathbb{N}$,

(N2) $n \in \mathbb{N} \ \Rightarrow \ n+1 \in \mathbb{N}$.

Die Menge der natürlichen Zahlen besitzt die folgende sogenannte Wohlordnungseigenschaft:

(N3) Jede nichtleere Teilmenge der Menge $\mathbb{N}$ besitzt ein kleinstes Element.

Die Eigenschaften (N1) und (N2) erlauben es, in vielen Situationen gewisse Definitionen rekursiv zu geben, z.B. die Definition der ganzzahligen Potenz einer reellen Zahl $a \neq 0$:

$$a^0 = 1\,, \quad a^n = a\,a^{n-1}\,, \quad a^{-n} = (a^{-1})^n\,,\ n \in \mathbb{N}$$

Wir nehmen nun an, dass eine Aussage $P(n)$, die von $n \in \mathbb{N}$ abhängt, zu beweisen sei (z.B. die Aussage "$1 + 2 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$"). Das Prinzip der vollständigen Induktion besagt dann, dass die Aussage $P(n)$ genau dann für alle $n \in \mathbb{N}$ wahr ist, wenn folgende zwei Bedingungen erfüllt sind:

(I1) $P(1)$ ist wahr.

(I2) Aus der Gültigkeit von $P(1), \ldots, P(k)$ für $k \in \mathbb{N}$ folgt stets die Gültigkeit von $P(k+1)$.

Begründung: Wir haben zu zeigen, dass aus (I1) und (I2) folgt, dass $P(n)$ für alle n wahr ist. Dazu verwenden wir die Methode des indirekten Beweises und nehmen an, dass die Menge

$$M = \{n \in \mathbb{N} : P(n) \text{ ist falsch}\}$$

nicht leer ist. Nach (N3) existiert eine kleinste Zahl n_0 in M. Wegen (I1) ist $n_0 > 1$, und $P(1), \ldots, P(n_0 - 1)$ sind wahr. Aus (I2) folgt, dass auch $P(n_0)$ wahr ist, was im Widerspruch zu $n_0 \in M$ steht.

Beispiel 1.18 (Bernoullische Ungleichung) *Man zeige, dass* $\forall x \in (-1, 0) \cup (0, \infty)$ *und* $\forall n \in \mathbb{N}$ *mit* $n \geq 2$ *die Ungleichung* $(1 + x)^n > 1 + nx$ *gilt.*
Beweis.

1. *Für den* **Induktionsanfang** *überprüfen wir die Richtigkeit der Ungleichung für* $n = 2$: $(1 + x)^2 = 1 + 2x + x^2 > 1 + 2x$

2. *Die* **Induktionsvoraussetung** *lautet: Es gilt* $(1+x)^n > 1+nx$ *für alle* $x \in (-1, 0) \cup (0, \infty)$ *und für alle* $n = 2, 3, \ldots, k$.

3. *Die* **Induktionsbehauptung** *lautet: Es gilt* $(1+x)^{k+1} > 1+(k+1)x$ *für alle* $x \in (-1,0) \cup (0,\infty)$.

4. *Wir führen den* **Induktionsbeweis***:*

$$\begin{aligned}(1+x)^{k+1} &= (1+x)(1+x)^k \\ &> (1+x)(1+kx) \\ &= 1+(k+1)x+kx^2 \\ &> 1+(k+1)x\,.\end{aligned}$$

2.-4. fasst man auch als **Induktionsschritt** *zusammen.* □

Beispiel 1.19 (geometrische Summenformel) *Für* $q \neq 1$ *und* $n \in \mathbb{N}$ *gilt*

$$1+q+q^2+\cdots+q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}\,.$$

Beweis.

1. *Anfang:* $1+q = \dfrac{(1-q)(1+q)}{1-q} = \dfrac{1-q^2}{1-q}$

2. *Vorauss.:* $\displaystyle\sum_{j=0}^{n} q^j = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \quad \forall n = 1,\ldots,k$

3. *Beh.:* $\displaystyle\sum_{j=0}^{k+1} q^j = \frac{1-q^{k+2}}{1-q}$

4. *Beweis:*

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{k+1} q^j &= \sum_{j=0}^{k} q^j + q^{k+1} = \frac{1-q^{k+1}}{1-q} + q^{k+1} \\ &= \frac{1-q^{k+1}+(1-q)q^{k+1}}{1-q} = \frac{1-q^{k+2}}{1-q}\end{aligned}$$

□

Für $n \in \mathbb{N}$ und $k \in \{0,1,2,\ldots,n\}$ definiert man den **Binominalkoeffizienten**

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdots k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}\,,$$

wobei $0! = 1$ und $k! = k \cdot (k-1)!$ für $k \in \mathbb{N}$. Für $k \in \{1, \ldots, n\}$ gilt

$$\begin{aligned}
\binom{n+1}{k} &= \frac{(n+1)n(n-1)\cdots(n+1-k+1)}{k!} \\
&= \frac{n(n-1)\cdots(n-(k-1)+1)(n-k+1+k)}{(k-1)!\,k} \\
&= \frac{n(n-1)\cdots(n-(k-1)+1)(n-k+1)}{k!} \\
&\qquad + \frac{n(n-1)\cdots(n-(k-1)+1)}{(k-1)!} \\
&= \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}
\end{aligned}$$

Beispiel 1.20 (binomische Formel)

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}, \quad a, b \in \mathbb{R}, \ n \in \mathbb{N}$$

Beispiel 1.21 (polynomische Formel)

$$(a_1 + \cdots + a_p)^n = \sum_{\substack{k_1 + \cdots + k_p = n \\ (k_1, \ldots, k_p) \in \mathbb{N}_0^p}} \frac{n!}{k_1! \cdots k_p!} a_1^{k_1} \cdots a_p^{k_p}$$

1.5 Übungsaufgaben

Wir erinnern an die Definition des Betrages $|x|$ einer reellen Zahl x,

$$|x| = \begin{cases} x & : \ x \geq 0, \\ -x & : \ x < 0, \end{cases}$$

und folgende seiner Eigenschaften:

- Es gilt $|x| \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ sowie $|x| = 0$ dann und nur dann, wenn $x = 0$ ist.
- $|x \cdot y| = |x| \cdot |y| \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}$
- Es gilt die Dreiecksungleichung $|x + y| \leq |x| + |y| \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}$.
- $\Big| |x| - |y| \Big| \leq |x - y| \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}$
- $\Big| |y - x| - |z - y| \Big| \leq |x - z| \quad \forall\, x, y, z \in \mathbb{R}$

1. Welche $x \in \mathbb{R}$ erfüllen die Ungleichungen bzw. Gleichungen
   (a) $|x-2| \geq 10$, (b) $|x| > |x+1|$, (c) $|x+2| + |x-2| \leq 12$,
   (d) **(HA)** $|x+2| - |x| > 1$, (e) **(HA)** $|x-1| \cdot |x-2| = 2$, (f) $|x| + |x+1| + |x-1| = 3$?

2. Veranschaulichen Sie in der xy–Ebene die Lösungsmengen folgender Ungleichungen:
   (a) $|x| + |y| \leq 1$, (b) $|x+y| \leq 1$, (c) $1 \leq |x-y| \leq 2$.

3. Lösen Sie folgende Gleichungen bzw. Gleichungssysteme:
   (a) $(x+3)^2 = 6x$,
   (b) $x^3(x+1)^3 = 216$,
   (c) $x + \dfrac{1}{x+1} + \dfrac{x(x-1)}{x^2-1} = 5$,
   (d) **(HA)** $\sqrt[3]{x+3} = 2$,
   (e) **(HA)** $\sqrt{x} + \sqrt[4]{x} = 12$,
   (f) $\log_{16} x + \log_4 x + \log_2 x = 7$,
   (g) $\dfrac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}} = 5$,
   (h) $\sqrt{x+y} + \sqrt{x-y} = a$, $\sqrt{x+y} - \sqrt{x-y} = b$,
   (i) $\left(\frac{3}{7}\right)^{3x-7} = \left(\frac{7}{3}\right)^{7x-3}$,
   (j) $\lg\left(3^{\sqrt{4x+1}} - 2^{4-\sqrt{4x+1}}\right) - 2 = \frac{1}{4}\lg 16 - \sqrt{x+0.25}\,\lg 4$.

4. Man löse folgende Ungleichungen:
   (a) $3^{4x^2-7x-14} \geq 9^{x^2-3x-4}$,
   (b) $2^{x+2} - 2^{x+3} - 2^{x+4} > 5^{x+1} - 5^{x+2}$,
   (c) $\sqrt{x+3} > \sqrt{x-9} + \sqrt{5-x}$,
   (d) $\sqrt{2+x-x^2} > x-4$.

5. Dividieren Sie:
   (a) $(21a^3 - 34a^2b + 25b^3) : (7a+5b)$, (b) $(9x^3 + 2y^3 - 7xy^2) : (3x-2y)$.

6. Vereinfachen Sie:
   (a) $\dfrac{16-49m^2}{16-28m}$, (b) $\dfrac{x^2-4y^2}{x^2-4xy+4y^2}$, (c) $\dfrac{a}{a^2-2ab+b^2} - \dfrac{a}{a^2-b^2} + \dfrac{1}{a+b}$,
   (d) $\dfrac{\frac{a+1}{a-1} - 1}{\frac{a+1}{a-1} + 1}$, (e) $\dfrac{\frac{1}{y^2} + \frac{2}{xy} + \frac{1}{x^2}}{\frac{1}{y^2} - \left(\frac{1}{x}\right)^2}$, (f) $\left(a^{-x}\right)^{-2y}$, (g) $\left(-a^{-3}\right)^{2n}$, $n \in \mathbb{N}$,
   (h) $\left(\dfrac{b^{-5}x^2}{a^{-6}y^{-4}}\right)^4 \cdot \left(\dfrac{a^4b^{-3}}{x^{-1}y^{-2}}\right)^{-6}$, (i) $a^{\frac{3}{4}} \cdot a^{\frac{2}{3}}$, (j) $a^{\frac{5}{3}} : a^{\frac{2}{5}}$,
   (k) $\sqrt[5]{a^2b^2}\,\sqrt[3]{ab^4}\,ab^{-1}$, (l) $\sqrt[3]{a\sqrt{b}}$, (m) $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}$.

7. Geben Sie zu folgenden Ausdrücken die quadratische Ergänzung an:

   (a) **(HA)** $x^2 + 6x$, (b) $z^2 - \frac{1}{7} z$, (c) **(HA)** $\frac{16}{49} t^2 - \frac{16}{21} t$.

8. Überprüfen Sie die Richtigkeit folgender Gleichungen:

   (a) $\dfrac{\sqrt[n]{a^{2n-3}} \cdot \left(\sqrt[n]{a}\right)^{n+7}}{\sqrt[n]{a^4}} = a^3$,

   (b) $\dfrac{\sqrt{a+x}}{\sqrt{a^4 - x^4}} (a^2 + x^2)^{\frac{1}{2}} = (a-x)^{-\frac{1}{2}}$,

   (c) $0.5^{x^2} \cdot 2^{2x+2} = 64^{-1}$.

9. Machen Sie den Nenner rational:

   (a) $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$, (b) $\dfrac{1}{\sqrt{3}+2}$, (c) $\dfrac{1}{2\sqrt{7}+\sqrt{5}}$.

10. Für welche $x \in \mathbb{R}$ gilt

    (a) $(\log_2 x)^{-1} - (\log_2 x - 1)^{-1} < 1$, (b) **(HA)** $\sin x + \cos x = 1$?

1.6 Fuzzy-Mengen

Definition 1.22 *Es sei $\mu_A : G \longrightarrow [0,1]$ eine auf der (nichtleeren) Menge G (hier auch Grundmenge genannt) definierte Funktion, die sog.* **Mitgliedsgrad**- *oder* **Zugehörigkeitsfunktion**. *Dann nennt man die Menge*

$$A := \{(x, \mu_A(x)) : x \in G\} \subset G \times [0,1] \tag{1.1}$$

eine **Fuzzy**- *oder* **unscharfe Menge**.

Eine klassische Teilmenge B der Grundmenge G kann man unter Verwendung der **charakteristischen Funktion**

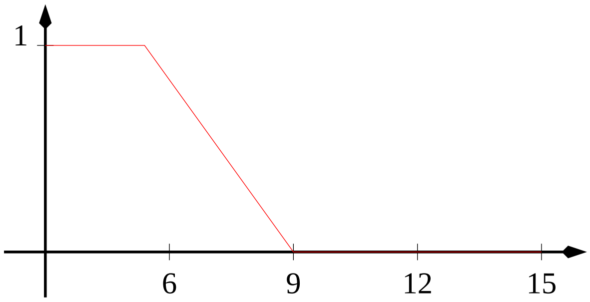
$$\chi_B : G \longrightarrow \mathbb{R}, \ x \mapsto \begin{cases} 1 & : \ x \in B, \\ 0 & : \ x \notin B, \end{cases}$$

der Menge B mit der Fuzzy-Menge

$$\{(x, \chi_B(x)) : x \in G\}$$

identifizieren, so z.B. auch die Grundmenge G mit der Fuzzy-Menge $\{(x, \mu_G(x)) : x \in G\}$, wobei $\mu_G \equiv 1$, und die leere Menge $\emptyset$ mit der Fuzzy-Menge $\{(x, \mu_\emptyset(x)) : x \in G\}$, wobei $\mu_\emptyset \equiv 0$.

Beispiel 1.23 *Wir betrachten die Fuzzy-Menge des niedrigen Zinsniveaus für Hypothekendarlehen auf der Grundmenge (Grundintervall) $[3, 15]$. Der Graph der Zugehörigkeitsfunktion könnte hier wie folgt aussehen:*



Definition 1.24 *Es seien A eine Fuzzy-Menge mit der Zugehörigkeitsfunktion $\mu_A : G \longrightarrow [0,1]$ und $\alpha \in [0,1]$. Dann heißen*

$$A_\alpha = \{x \in G : \mu_A(x) \geq \alpha\}$$

α-Niveaumenge *von A und*

$$A_\alpha^* = \{x \in G : \mu_A(x) > \alpha\}$$

strenge α-Niveaumenge *von A. Die Menge A_0^* nennt man auch* **Träger** *oder* **Stütze** *der Fuzzy-Menge A.*

Man beachte, dass die eben definierten Niveaumengen klassische Mengen sind. Dabei gilt stets:

1. *Aus $\alpha \leq \beta$ folgt $A_\beta \subset A_\alpha$.*
2. *Für alle $x \in G$ ist $\mu_A(x) = \sup \Big\{ \min\{\alpha, \mu_{A_\alpha}(x)\} : \alpha \in [0,1] \Big\}$. (Repräsentationssatz)*

Unter der **Höhe** der Fuzzy-Menge (1.1) versteht man die Zahl

$$h(A) = \sup\{\mu_A(x) : x \in G\} .$$

Eine Fuzzy-Menge A nennt man **normal** bzw. **normalisiert**, wenn $h(A) = 1$ gilt.

Definition 1.25 *Es seien A und B zwei Fuzzy-Mengen mit den Zugehörigkeitsfunktionen $\mu_A : G \longrightarrow [0,1]$ bzw. $\mu_B : G \longrightarrow [0,1]$. Wir sagen, dass*

- *$A = B$, wenn $\mu_A(x) = \mu_B(x) \ \forall\, x \in G$,*
- *$A \subset B$, wenn $\mu_A(x) \leq \mu_B(x) \ \forall\, x \in G$.*

Beispiel 1.26 *Auf der Menge $T = \{17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24\}$ von Wassertemperaturen in Freibädern betrachten wir die Fuzzy-Mengen* warm*,* lauwarm *und* sehr warm*:*

$$\mathsf{warm} = \{(17,0.0),(18,0.2),(19,0.5),(20,0.7),(21,0.9),(22,1.0),(23,1.0),(24,1.0)\} ,$$

$$\mathsf{lauwarm} = \{(17,0.1),(18,0.3),(19,0.6),(20,0.8),(21,1.0),(22,1.0),(23,1.0),(24,1.0)\} ,$$

$$\mathsf{sehr\ warm} = \{(17,0.0),(18,0.0),(19,0.1),(20,0.3),(21,0.6),(22,0.8),(23,0.9),(24,1.0)\} .$$

Es gilt

$$\mu_{\mathsf{sehr\ warm}}(t) \leq \mu_{\mathsf{warm}}(t) \leq \mu_{\mathsf{lauwarm}}(t) \quad \forall\, t \in T ,$$

also sehr warm $\subset$ warm $\subset$ lauwarm .

Ist $n \in \{2,3,4,5,\ldots\}$, so nennt man

$$\mathrm{kon}_n A := \Big\{\Big(x, [\mu_A(x)]^n\Big) : x \in G\Big\} \quad \text{und} \quad \mathrm{dil}_n A := \Big\{\Big(x, \sqrt[n]{\mu_A(x)}\Big) : x \in G\Big\}$$

eine **Konzentration** bzw. **Dilatation** der Fuzzy-Menge (1.1). Dabei gilt offenbar

$$\mathrm{kon}_n A \subset A \subset \mathrm{dil}_n A \,.$$

Für jede Fuzzy-Menge (1.1) gilt $\emptyset \subset A \subset G$.

Definition 1.27 *Für zwei Fuzzy-Mengen A und B definieren wir den* **Fuzzy-Durchschnitt** $A \cap B$, *die* **Fuzzy-Vereinigung** $A \cup B$ *und das* **Fuzzy-Komplement** $\overline{A}$ *durch* $\mu_{A\cap B}(x) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$, $\mu_{A\cup B}(x) = \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$ *bzw.* $\mu_{\overline{A}}(x) = 1 - \mu_A(x)$.

Wir fassen im folgenden einige Eigenschaften der in der Def. 1.27 erklärten Fuzzy-Operationen zusammen. Dabei seien A, B und C Fuzzy-Mengen über der Grundmenge G :

1. $(A\cap B)_\alpha = A_\alpha \cap B_\alpha$, $(A\cup B)_\alpha = A_\alpha \cup B_\alpha$,
2. $G \cap A = A$, $\emptyset \cup A = A$,
3. $A\cap B = B \cap A$, $A \cup B = B \cup A$,
4. $(A\cap B)\cap C = A\cap(B\cap C)$, $(A\cup B)\cup C = A\cup(B\cup C)$,
5. $A\cap(B\cup C) = (A\cap B)\cup(A\cap C)$, $A\cup(B\cap C) = (A\cup B)\cap(A\cup C)$,
6. $A\cap(A\cup B) = A$, $A\cup(A\cap B) = A$,
7. $\overline{A\cap B} = \overline{A}\cup\overline{B}$, $\overline{A\cup B} = \overline{A}\cap\overline{B}$,
8. $\overline{\overline{A}} = A$, $\overline{G} = \emptyset$, $\overline{\emptyset} = G$.

Beachte: Für Fuzzy-Mengen A gilt i.a. **nicht** $A\cap\overline{A} = \emptyset$ und $A\cup\overline{A} = G$.

1.7 Logik

1.7.1 Aussagenlogik

Definition 1.28 *Eine* **Aussage** *ist ein Satz in einer Sprache, der einen Sachverhalt ausdrückt, dem eindeutig und objektiv genau einer der* **Wahrheitswerte** *"wahr" (bzw. "w", "true", "1", ...) oder "falsch" (bzw. "f", "false", "0", ...) zugeordnet werden kann.*

Gegenstand der mathematischen Aussagenlogik ist nun die Verknüpfung von Einzelaussagen zu zusammengesetzten Aussagen. Diese Aussagenverbindungen lassen sich stets auf die einstellige Operation der **Negation** (Symbol "$\neg A$" bzw. "$\overline{A}$", in Worten "nicht A") und die zweistelligen Operationen der **Konjunktion** (Symbol "$\wedge$", in Worten "und"), der **Disjunktion** (Symbol "$\vee$", in Worten "oder"), der **Implikation** (Symbol "$\Rightarrow$", in Worten "wenn ... , dann ...") und der **Äquivalenz** (Symbol "$\Leftrightarrow$", in Worten "genau dann ... , wenn ...") zurückführen. Die jeweiligen Wahrheitswerte der Verknüpfungen sind aus der folgenden **Wahrheitswerttabelle** zu erkennen. Dabei bezeichnen A und B Aussagen.

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
w	w	f	w	w	w	w
w	f	f	f	w	f	f
f	w	w	f	w	w	f
f	f	w	f	f	w	w

Beispiel 1.29 *"entweder A oder B" $= \neg(A \Leftrightarrow B)$, denn*

A	B	$A \Leftrightarrow B$	$\neg(A \Leftrightarrow B)$
w	*w*	*w*	*f*
w	*f*	*f*	*w*
f	*w*	*f*	*w*
f	*f*	*w*	*f*

Beispiel 1.30 *Die Aussage*

$$\text{"}\forall x \in \mathbb{R} \textit{ gilt } x^2 \geq 0\text{"}$$

ist wahr. Die Negation dieser Aussage

$$\text{"}\exists x \in \mathbb{R} : x^2 < 0\text{"}$$

ist somit falsch.

Aussagenverbindungen, die unabhängig vom Wahrheitswert der Teilaussagen stets wahre Aussagen liefern, nennt man **Tautologien**. Zu diesen gehören z.B.

- der **Transitivitätssatz**, auch Kettenschlussregel genannt:

$$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C),$$

- die **de Morganschen Gesetze**:

$$\neg(A \wedge B) \;\Leftrightarrow\; ((\neg A) \vee (\neg B)) \quad \text{und} \quad \neg(A \vee B) \;\Leftrightarrow\; ((\neg A) \wedge (\neg B)) \tag{1.2}$$

Neben den Tautologien, also den stets wahren Aussagen, gibt es die **Kontradiktionen**, die stets falschen Aussagen (Widersprüche).

Definition 1.31 *Zwei Aussagenverbindungen nennt man* **aussagenlogisch äquivalent** *und beschreibt dies durch das Gleichheitszeichen, wenn sie bei jeder möglichen Wahrheitswertbelegung der Einzelaussagen den gleichen Wahrheitswert liefern.*

Mit dieser Definition kann man die de Morganschen Regeln (1.2) auch in der Form

$$\neg(A \wedge B) = (\neg A) \vee (\neg B) \quad \text{und} \quad \neg(A \vee B) = (\neg A) \wedge (\neg B) \tag{1.3}$$

schreiben. Weitere Beispiele für solche Gleichheiten sind

$$\begin{aligned}
A \wedge B = B \wedge A \quad &\text{und} \quad A \vee B = B \vee A\,, \\
A \wedge (B \wedge C) = (A \wedge B) \wedge C \quad &\text{und} \quad A \vee (B \vee C) = (A \vee B) \vee C\,, \\
(A \wedge B) \vee C = (A \vee C) \wedge (B \vee C) \quad &\text{und} \quad (A \vee B) \wedge C = (A \wedge C) \vee (B \wedge C)\,, \\
A \Leftrightarrow B = (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A) &= ((\neg A) \wedge (\neg B)) \vee (A \wedge B)\,, \\
A \Rightarrow B &= (\neg A) \vee B\,.
\end{aligned}$$

Wir haben bereits als eine Möglichkeit, die Richtigkeit einer Aussage (einer Behauptung) zu beweisen, die Beweistechnik der vollständigen Induktion kennengelernt, deren Begründung wir mittels einer anderen Beweistechnik geliefert haben, nämlich mit der Technik des **indirekten Beweises**. Hierbei wird von der Richtigkeit der Negation der Behauptung ausgegangen und versucht, durch logische Schlüsse (d.h. logisch richtige Verknüpfungen, also Tautologien) einen Widerspruch zu den als wahr bekannten Voraussetzungen der Behauptung zu finden. Da eine Aussage entweder wahr oder falsch ist, ist damit die Richtigkeit der Behauptung bewiesen. Beim **direkten Beweis** wird, wie die Bezeichnung schon verrät, auf direktem Weg ausgehend von den Voraussetzungen durch logische Schlüsse die Richtigkeit der Behauptung abgeleitet.

Dass das geometrische Mittel zweier positiver reeller Zahlen nicht grösser als ihr arithmetisches ist, kann man leicht auf direktem Wege zeigen:

$$(a-b)^2 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad (a+b)^2 \geq 4\,ab \quad \Rightarrow \quad \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

Dagegen ist der Beweis dafür, dass die Zahl 2 keine rationale Wurzel hat, am besten indirekt zu führen:

$$\begin{aligned}
2 = \left(\frac{p}{q}\right)^2\,, \ p, q \in \mathbb{N}\,,\ ggT(p,q) = 1 \\
\Rightarrow \quad 2\,q^2 = p^2 \quad \Rightarrow \quad p = 2\,r\,,\ r \in \mathbb{N} \\
\Rightarrow \quad q^2 = 2\,r^2 \quad \Rightarrow \quad ggT(p,q) \geq 2
\end{aligned}$$

1.7.2 Prädikatenlogik

Eine (elementare) **Aussage der Prädikatenlogik** wird mittels einer Grundmenge S (auch Menge von Subjekten oder Individuenbereich genannt) und einem ein- oder mehrstelligen Prädikat über dieser Grundmenge S gebildet. Dabei können die Argumente des Prädikats (also die in das Prädikat einzusetzenden Subjekte) selbst durch eine Funktion auf der Grundmenge S gebildet sein.

Beispiel 1.32 *Wir betrachten die Aussage "Die Zahlen 12 und 25 sind teilerfremd." Um dies prädikatenlogisch zu beschreiben definieren wir*

- *die Grundmenge* $S := \mathbb{N}$,
- *das zweistellige Prädikat* $= (.,.)$ *auf* $\mathbb{N}$ *und*
- *die Funktion* $\mathrm{ggT} : \mathbb{N}^2 \longrightarrow \mathbb{N}$, *die zwei natürlichen Zahlen ihren größten gemeinsamen Teiler zuordnet.*

Die obige Aussage lässt sich dann als " $= (\mathrm{ggT}(12,25),1)$ *" (oder "* $\mathrm{ggT}(12,25) = 1$ *") schreiben.*

Mittels prädikatenlogischer Aussagen lassen sich nun **Aussageformen** bilden, in denen Variablen über der Grundmenge S auftreten.

Beispiel 1.33 *Es sei* $S = \mathbb{R}$. *Dann ist die Aussageform*

$$\forall\, y\, \exists\, x\ \{y \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R} : = (y, 2x+5)\}$$

allgemeingültig. Eine andere Schreibweise für die Aussageform wäre z.B.

$$\forall\, y \in \mathbb{R}\ \exists\, x \in \mathbb{R} : y = 2x + 5\,.$$

Bzgl. der prädikatenlogischen Gültigkeit einer Aussageform unterscheidet man zwischen

- **allgemeingültig**, falls jede Interpretation gültig ist,
- **konsistent** (erfüllbar), falls es wenigstens eine gültige Interpretation gibt,
- **inkonsistent** (nicht erfüllbar), falls keine Interpretation gültig ist.

So ist

$$\exists\, x\, \forall\, y\ \left\{x \in \mathbb{R}, y \in [0,\infty) : y = x^2\right\}$$

zwar konsistent, aber nicht allgemeingültig. Dagegen ist die Aussageform

$$\forall\, y\, \exists\, x\ \left\{x \in \mathbb{R}, y \in [0,\infty) : y = x^2\right\}$$

allgemeingültig. Die Aussageform

$$\exists\, x\ \left\{x \in \mathbb{R} : -3 = x^2\right\}$$

ist inkonsistent.

Es sei noch auf die folgenden Verneinungsregeln hingewiesen:

$$\neg\,(\forall\, x\ \{x \in S : A(x)\}) = \exists\, x\ \{x \in S : \neg A(x)\}$$

und

$$\neg\,(\exists\, x\ \{x \in S : A(x)\}) = \forall\, x\ \{x \in S : \neg A(x)\}\,.$$

Dabei bezeichnet $A(x)$ eine prädikatenlogische Aussage über der Variablen x.

1.8 Übungsaufgaben

1. Man gebe die folgenden Mengen mit Hilfe ihrer Grundmenge und der Eigenschaft ihrer Elemente an: $M_1 = \{2,4,6,8,10,\dots\}$, $M_2 = \{2,4,8,16,32,\dots\}$, $M_3 = [-1,1]$.

2. Man gebe die folgenden Mengen durch Aufzählen ihrer Elemente an:
$$M_4 = \{x \in \mathbb{Z} : x = 2g, g \in \mathbb{Z}\} \cap \{x \in \mathbb{Z} : x = 3g, g \in \mathbb{Z}\} ,$$
$$M_5 = \{x \in \mathbb{R} : \sin x = \cos x\} , \quad M_6 = \left\{x \in \mathbb{R} : x^2 + 1 + 2x = (x+1)^2\right\} .$$

3. Gegeben seien die Mengen $A = \{1,2,3,4,5\}$, $B = \{4,5,6,7,8\}$, $C = \{x \in \mathbb{R} : x \le 4\}$ und $D = \{y \in \mathbb{R} : y > 1 \text{ und } y < 6\}$.
   (a) Man bestimme $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $A \Delta B := (A \cup B) \setminus (A \cap B)$, $(A \setminus B) \times (B \setminus A)$, $\mathcal{P}(B \setminus A)$, $B \cap D$, $C \cup D$ und $D \setminus C$.
   (b) Die Funktion $f : A \longrightarrow B$ bilde die Elemente aus A wie folgt ab:

a	1	2	3	4	5
$f(a)$	5	5	7	6	8

   i. Man prüfe, ob f surjektiv, injektiv oder bijektiv ist.
   ii. Man bestimme das Bild der Menge $\{2,3\}$ und das vollständige Urbild von $\{5,7\}$.

   (c) Auf der Menge A sei die Permutation $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ definiert. Berechnen Sie $f \circ g$ und $g \circ g$.

4. Untersuchen Sie, ob die folgenden Funktionen $f : A \longrightarrow B$ surjektiv, injektiv oder bijektiv sind:
   (a) $A = B = \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$, (b) $A = \mathbb{R}$, $B = \mathbb{R}_+ := \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$, $f(x) = e^x$,
   (c) $A = \mathbb{R} \setminus \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$, $B = \mathbb{R}$, $f(x) = \tan x$,
   (d) $A = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $B = \mathbb{R}$, $f(x) = \tan x$, (e) $A = B = \mathbb{R}$, $f(x) = |2x - 4|$.

5. Welche Relationszeichen werden durch die beiden folgenden Relationen beschrieben?
   (a) $R = \{(x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \exists n \in \mathbb{N}_0 \text{ mit } y = x + n\}$
   (b) $R = \Big\{(A,B) \in \mathcal{P}(M) \times \mathcal{P}(M) : \forall x \in M \text{ gilt (Wenn } x \in A\text{, dann auch } x \in B\text{.)}\Big\}$

6. Man bestimme eine Teilmenge $M \subset \mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen und $x, y, z \in M$, so dass die Relation
$$R = \Big\{(x,7),(1,8),(4,4),(9,8),(7,3),(5,5),(9,1),(8,9),(8,y),(1,9),$$
$$(3,3),(8,8),(7,7),(1,1),(z,z)\Big\}$$
eine Äquivalenzrelation auf M ist.

7. Sind folgende Rechenregeln richtig ($R, S \subset M_1 \times M_2$, $T \subset M_2 \times M_3$):
$$(R \cup S) \circ T = (R \circ T) \cup (S \circ T), \quad (R \cap S) \circ T = (R \circ T) \cap (S \circ T).$$
8. Auf der Menge der reellen Zahlen sei eine Relation R wie folgt definiert:
$$R = \left\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : \exists k \in \mathbb{Z} \text{ mit } x - y = \frac{1}{2}k\right\}$$
Zeigen Sie, dass R eine Äquivalenzrelation ist. Geben Sie die Äquivalenzklassen an.
9. Man zeige, dass der Durchschnitt und die Vereinigung zweier Äquivalenzrelationen über einer Menge M wieder Äquivalenzrelationen sind.
10. Bestimmen Sie die Höhe der folgenden Fuzzy-Mengen und nehmen Sie gegebenenfalls eine Normalisierung vor:

    (a) $A = \{(a, 0.5), (b, 0.1), (c, 0.8), (d, 0.2)\}$, (b) $B = \left\{\left(x, \dfrac{1}{2 - e^{-x^2}}\right) : x \in \mathbb{R}\right\}$,

    (c) $C = \left\{\left(x, \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\right) : x \in [0, \infty)\right\}$, (d) $D = \left\{\left(x, \dfrac{1}{2 + e^{-x^2}}\right) : x \in \mathbb{R}\right\}$,
11. A, B und C seien Fuzzy-Mengen über der Grundmenge G. Zeigen Sie die Gültigkeit folgender Formeln bzw. Aussagen:

    (a) $A \subset (A \cup B)$, (b) $(A \cap B) \subset A$, (c) $(A \cap B) \subset (A \cup B)$,

    (d) $A \cup B = \emptyset \Rightarrow A = \emptyset$ und $B = \emptyset$, (e) $C \subset A$ und $C \subset B \Rightarrow C \subset (A \cap B)$,

    (f) $A \subset C$ und $B \subset C \Rightarrow (A \cup B) \subset C$.
12. A, B und C seien Fuzzy-Mengen. Vereinfachen Sie den Ausdruck
$$\overline{A \cap (A \cup \overline{B} \cup C) \cap (\overline{A} \cup B)}.$$
13. Zeigen Sie, dass die Aussage $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C) \wedge (A \wedge (\neg C))$ eine Kontradiktion ist, d.h. dass die Aussage immer falsch ist.
14. Für das Umformen von Aussagen gelten die de Morganschen Gesetze (1.2) bzw. (1.3). Formen Sie mit deren Hilfe die folgende Aussage so um, dass nur noch die Konjunktion $\wedge$ und die Negation $\neg$ vorkommen: $(A \vee B) \wedge (\neg(A \wedge (C \vee B)))$.
15. Drücken Sie den folgenden Satz prädikatenlogisch aus: “Susi und die Mutter von Lukas sind Schwestern.”
16. Beweisen Sie die nachfolgenden Summenformeln mittels vollständiger Induktion:

    (a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2 + k} = \frac{n}{n+1}$, (b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
17. Zeigen Sie, dass jeder Rubelbetrag über 7 Rubel durch Kombination von 3- und 5-Rubel-Scheinen gebildet werden kann.

1.9 Ergänzungen

1. Eine reflexive, antisymmetrische und transitive Relation heißt **Halbordnungsrelation**. Ein geordnetes Paar $(M, \preceq)$, bestehend aus einer nichtleeren Menge M und einer Halbordnungsrelation "$\preceq$"$\in M \times M$, wird **Halbordnung** genannt. Man schreibt dann auch $x \succeq y$ für $y \preceq x$. Eine Halbordnung nennt man endlich, wenn M nur aus endlich vielen Elementen besteht.

2. Die Halbordnungen $(\mathbb{R}, \leq)$, $(\mathbb{Z}, \leq)$ oder auch $(\mathbb{N}, \leq)$ (mit der gewöhnlichen "$\leq$"-Relation) haben die Eigenschaft, dass für zwei Elemente x, y stets $x \leq y$ oder $y \leq x$ gilt, d.h., dass zwei beliebige Elemente stets vergleichbar sind, weshalb man diese Mengen auch **vollständig geordnet** bzw. die entsprechenden Halbordnungen eine **Kette** nennt.

3. Ist $(M, \preceq)$ eine Halbordnung, so schreibt man $x \prec y$ für $x \preceq y$ und $x \neq y$. Man nennt $x \in M$ einen **unteren** (bzw. **oberen**) **Nachbar** von $y \in M$, wenn $x \prec y$ (bzw. $x \succ y$) gilt und **kein** $z \in M$ mit $x \prec z \prec y$ (bzw. $x \succ z \succ y$) existiert. Ein Element $x^* \in M$ wird **maximal** (bzw. **minimal**) genannt, wenn **kein** $y \in M$ mit der Eigenschaft $y \succ x^*$ (bzw. $y \prec x^*$) existiert. Ein Element $x^* \in M$ heißt **größtes** (bzw. **kleinstes**) Element der Halbordnung $(M, \preceq)$, wenn $y \preceq x^*$ (bzw. $x^* \prec y$) für alle $y \in M$ gilt.

4. Graphisch veranschaulicht man eine Halbordnung mittels eines Graphen, in dem man nur (gerichtete) Kanten zwischen benachbarten Knoten einzeichnet. (Ein solcher Graph wird auch **Hasse-Diagramm** der entsprechenden Halbordnung genannt.)

5. Sind $(M_1, \preceq_1)$ und $(M_2, \preceq_2)$ zwei Halbordnungen und $\varphi : M_1 \to M_2$ eine Abbildung, so nennt man diese Abbildung **ordnungstreu**, wenn aus $x \preceq_1 y$ stets $\varphi(x) \preceq_2 \varphi(y)$ folgt.

6. Eine Halbordnung $(M, \preceq)$ nennt man **Präferenzordnung**, wenn eine ordnungstreue Abbildung $\varphi : (M, \preceq) \longrightarrow (\mathbb{N}, \leq)$ mit der Eigenschaft
$$x \prec y \iff \varphi(x) < \varphi(y)$$
existiert. Die zugrundeliegende Relation "$\preceq$" wird dann **Präferenzrelation** genannt.

7. Für eine Halbordnung $(M, \preceq)$ definiert man die sog. **Indifferenzrelation** $I \subset M \times M$ wie folgt:
$$xIy \iff \text{Es gilt weder } x \prec y \text{ noch } y \prec x\,.$$

   Satz 1.34 *Die Indifferenzrelation zu einer Präferenzrelation ist eine Äquivalenzrelation. Ist die Indifferenzrelation einer endlichen Halbordnung eine Äquivalenzrelation, so ist diese Halbordnung eine Präferenzordnung.*

8. Es seien $(K, \preceq_j)$, $j = 1, \ldots, n$, Präferenzordnungen ein und derselben Menge K (z.B. K - Menge von Kandidaten, n - Anzahl der Wahlberechtigten). An eine kollektive Auswahlregel $R(\preceq_1, \ldots, \preceq_n) \in K \times K$ könnte man nun folgende Forderungen stellen:

   (F1) Es gibt kein $j_0 \in \{1, \ldots, n\}$, so dass $R(\prec_1, \ldots, \preceq_n) = \preceq_{j_0}$ für alle $(\prec_1, \ldots \prec_n) \in \mathbb{P}_K^n$ ($\mathbb{P}_K$ - Menge der Präferenzrelationen auf K). (Es gibt keinen Diktator.)

(F2) Aus $x \preceq_j y$, $j = 1, \ldots, n$, folgt $xR(\prec_1, \ldots, \prec_n)y$ (Pareto-Prinzip).

(F3) Es seien $K_0 \subset K$ und $(\preceq_1, \ldots, \preceq_n), (\preceq_1', \ldots, \preceq_n') \in \mathbb{P}_K^n$ mit $x \preceq_j y \iff x \preceq_j' y$ $\forall\, x, y \in K_0$, $\forall\, j \in \{1, \ldots, n\}$. Dann gilt für alle $x, y \in K_0$

$$xR(\preceq_1, \ldots, \preceq_n)y \iff xR(\preceq_1', \ldots, \preceq_n')y$$

(Unabhängigkeitsprinzip).

Ist $R(\preceq_1, \ldots, \preceq_n)$ für alle $(\preceq_1, \ldots, \preceq_n) \in \mathbb{P}_k^n$ eine Präferenzrelation, so nennt man die Abbildung $R : \mathbb{P}_K^n \longrightarrow \mathbb{P}_K$, $(\preceq_1, \ldots, \preceq_n) \mapsto R(\preceq_1, \ldots, \preceq_n)$ eine **soziale Wohlfahrtsfunktion**.

Satz 1.35 *Für $\#K \geq 3$ und $n \geq 2$ gibt es keine soziale Wohlfahrtsfunktion, die alle Forderungen (F1), (F2) und (F3) erfüllt.*

Beispiel 1.36 *Die Rangordnungsmethode ist eine soziale Wohlfahrtsfunktion. Die Methode der Mehrheitsentscheidung ist keine Wohlfahrtsfunktion, erfüllt aber (F1), (F2) und (F3).*

Kapitel 2

Zahlenfolgen und Zahlenreihen

2.1 Zahlenfolgen

Unter einer (reellen) **Zahlenfolge** $(a_n)_{n=1}^\infty$ verstehen wir eine Abbildung $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}\,,\ n \mapsto a_n\,.$ Ist $1 \le k_1 < k_2 < \cdots$ eine streng monoton wachsende Folge natürlicher Zahlen, so nennen wir $g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}\,,\ n \mapsto a_{k_n}$, eine **Teilfolge** von $(a_n)_{n=1}^\infty$ (in Zeichen: $(a_{k_n})_{n=1}^\infty$).

Definition 2.1 *Eine Zahlenfolge* $(a_n)_{n=1}^\infty$ *heißt* **Nullfolge**, *wenn*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} : |a_n| < \varepsilon\ \forall n > N\,.$$

Eine Zahlenfolge $(a_n)_{n=1}^\infty$ *nennt man* **konvergent** *mit dem* **Grenzwert** a , *wenn* $(a_n - a)_{n=1}^\infty$ *eine Nullfolge ist (in Zeichen:* $a = \lim_{n\to\infty} a_n$, *kurz:* $a = \lim a_n$ *bzw.* $a_n \longrightarrow a$*). Die Menge aller Nullfolgen bezeichnen wir mit* $\mathbf{c}_0$, *die Menge aller konvergenten Folgen mit* $\mathbf{c}$. *Eine Zahlenfolge* $(a_n)_{n=1}^\infty$ *heißt* **beschränkt**, *wenn ein* $M \in \mathbb{R}$ *existiert, so dass* $|a_n| \le M\ \forall n \in \mathbb{N}$. *Die Menge aller beschränkten Zahlenfolgen bezeichnen wir mit* ℓ^∞ . *Eine nicht konvergente Zahlenfolge nennt man auch* **divergent**.

Wir erinnern an die Definition des Betrages einer reellen Zahl a :

$$|a| := \begin{cases} \ \ a & , \quad a \ge 0\,, \\ -a & , \quad a < 0\,. \end{cases}$$

Es folgt die **Dreiecksungleichung** $|a + b| \le |a| + |b|$ und auch $\Big||a| - |b|\Big| \le |a - b|\,,\ a, b \in \mathbb{R}\,.$

Der Grenzwert einer konvergenten Folge ist eindeutig bestimmt. Jede Teilfolge einer konvergenten Folge ist konvergent mit demselben Grenzwert. Ferner gilt:

(1) $\left(\frac{1}{n}\right)_{n=1}^\infty \in \mathbf{c}_0$ (nach dem Archimedesschen Axiom)

(2) $\mathbf{c}_0 \subset \mathbf{c} \subset \ell^\infty$ (strenge Inklusionen)

So sind z.B. $\left(1 + \frac{1}{n}\right)_{n=1}^\infty$ eine konvergente Folge, aber keine Nullfolge, und $((-1)^n)_{n=1}^\infty$ eine beschränkte Folge, aber keine konvergente.

(3) $(a_n)_{n=1}^\infty, (b_n)_{n=1}^\infty \in \mathbf{c}_0 \implies (a_n \pm b_n)_{n=1}^\infty \in \mathbf{c}_0$

(4) $(a_n)_{n=1}^\infty \in \mathbf{c}_0, (b_n)_{n=1}^\infty \in \ell^\infty \implies (a_n b_n)_{n=1}^\infty \in \mathbf{c}_0$

(5) $(a_n)_{n=1}^\infty, (b_n)_{n=1}^\infty \in \mathbf{c} \implies (a_n \pm b_n)_{n=1}^\infty, (a_n b_n)_{n=1}^\infty \in \mathbf{c}$ und $\lim(a_n \pm b_n) = \lim a_n \pm \lim b_n$, $\lim(a_n b_n) = (\lim a_n)(\lim b_n)$

Für eine konstante Folge $(\gamma_n)_{n=1}^\infty = (\gamma)_{n=1}^\infty$ erhält man speziell $\lim \gamma a_n = \gamma \lim a_n$.

(6) $(a_n)_{n=1}^\infty \in \mathbf{c}$ und $a = \lim a_n \neq 0 \implies \exists N \in \mathbb{N} : a_n \neq 0 \ \forall n > N$ und

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_{n+N}} = \lim_{n\to\infty, n>N} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{a}$$

(7) $(a_n)_{n=1}^\infty \in \mathbf{c}_0$, $\exists N \in \mathbb{N} : |b_n| \le |a_n| \ \forall n > N \implies (b_n)_{n=1}^\infty \in \mathbf{c}_0$

(8) $(a_n)_{n=1}^\infty, (c_n)_{n=1}^\infty \in \mathbf{c}$, $\exists N \in \mathbb{N} : a_n \le b_n \le c_n \ \forall n > N$ und $a = \lim a_n = \lim c_n \implies (b_n)_{n=1}^\infty \in \mathbf{c}$ und $\lim b_n = a$

(9) $(a_n)_{n=1}^\infty \in \mathbf{c} \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} : |a_n - a_m| < \varepsilon \ \forall n, m > N$

Diese Aussage wird **Cauchysches Konvergenzkriterium** genannt und ist äquivalent zur Vollständigkeit der Menge der reellen Zahlen. Eine Zahlenfolge, die der Bedingung in (9) genügt, nennt man auch **Cauchy-** oder **Fundamentalfolge**.

Bemerkung 2.2 *Falls für jedes $A \in \mathbb{R}$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $a_n > A$ für alle $n > N$, so schreibt man $\lim a_n = \infty$. Analog schreibt man $\lim a_n = -\infty$, falls $\lim(-a_n) = \infty$.*

Bemerkung 2.3 *Man nennt c das harmonische Mittel der positiven Zahlen a und b, wenn $\frac{1}{c} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$ gilt. Da $n = \frac{1}{2}(n-1+n+1)$ gilt, heißt die Nullfolge $\left(\frac{1}{n}\right)_{n=1}^\infty$ auch* **harmonische Folge**.

Beispiel 2.4 *Es sei $0 < |q| < 1$. Dann ist $(q^n)_{n=1}^\infty \in \mathbf{c}_0$.*

Beweis. Aus der Bernoullischen Ungleichung folgt für $h := \frac{1}{|q|} - 1 > 0$

$$(1+h)^n > 1 + nh\,,$$

d.h.

$$|q^n| = |q|^n = \frac{1}{(1+h)^n} < \frac{1}{1+nh} < \frac{1}{n}\frac{1}{h}\,.$$

□

Beispiel 2.5 *Es gilt $\left(\frac{a^n}{n!}\right)_{n=1}^\infty \in \mathbf{c}_0$ für beliebiges (aber festes) $a \in \mathbb{R}$.*

Beweis. $\exists N \in \mathbb{N} : \dfrac{|a|}{n} \le \dfrac{1}{2} \ \forall n > N \implies$

$$\left|\frac{a^n}{n!}\right| = \frac{|a|^n}{n!} = \frac{|a|^N}{N!} \cdot \frac{|a|}{N+1} \cdots \frac{|a|}{n} \le \frac{|a|^N}{N!} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-N} = \frac{(2|a|)^N}{N!} \left(\frac{1}{2}\right)^n .$$

□

Beispiel 2.6 $\dfrac{7n^2 + 2n + 4}{3n^2 + 8} = \dfrac{7 + \frac{2}{n} + \frac{4}{n^2}}{3 + \frac{8}{n^2}} \longrightarrow \dfrac{7}{3}$

Beispiel 2.7 *Es seien* $\gamma > 0$ *und* $a_n = \gamma^{\frac{1}{n}}$ $(\alpha = \gamma^{\frac{1}{n}}$ *genau dann, wenn* $\gamma = \alpha^n)$. *Wir setzen* $b_n := a_n - 1$.

- $\gamma \ge 1$:

  $\implies b_n \ge 0$ *und* $\gamma = (1 + b_n)^n \ge 1 + nb_n$ *(Bernoullische Ungleichung)*

  $\implies \dfrac{\gamma - 1}{n} \ge b_n \implies (b_n)_{n=1}^{\infty} \in \mathbf{c}_0 \implies \lim a_n = 1$

- $0 < \gamma < 1$:

  $\implies a_n = \dfrac{1}{\left(\frac{1}{\gamma}\right)^{\frac{1}{n}}} \longrightarrow 1$

Also: $\lim \gamma^{\frac{1}{n}} = 1 \ \forall \gamma \in (0, \infty)$.

Beispiel 2.8 $a_n = (3^n + 4^n)^{\frac{1}{n}} \implies 4 = (4^n)^{\frac{1}{n}} < a_n < (2 \cdot 4^n)^{\frac{1}{n}} = 4 \cdot 2^{\frac{1}{n}} \implies \lim a_n = 4$

Wir erwähnen noch zwei wichtige Folgerungen aus der Grenzwertdefinition, wobei erstere auf der Vollständigkeit der Menge der reellen Zahlen beruht:

(10) Jede beschränkte Zahlenfolge besitzt eine konvergente Teilfolge, d.h.

$$\forall \, (a_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell^{\infty} \quad \exists \, (k_n)_{n=1}^{\infty} : 1 \le k_1 < k_2 < \cdots \quad \text{und} \quad (a_{k_n})_{n=1}^{\infty} \in \mathbf{c} .$$

(11) $a_n \longrightarrow a$, $b_n \longrightarrow b$, $\exists N \in \mathbb{N} : a_n \le b_n \ \forall n > N \implies a \le b$

2.2 Monotone Zahlenfolgen. Partielle Grenzwerte

Definition 2.9 *Die Zahlenfolge* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *heißt* **monoton wachsend (fallend)**, *wenn* $a_n \le a_{n+1}$ $(a_n \ge a_{n+1})$ $\forall n \in \mathbb{N}$ *(evtl.* $\forall n > N$*) gilt. Eine Zahlenfolge heißt* **monoton**, *wenn sie monoton wachsend oder fallend ist.*

Satz 2.10 *Eine monotone Zahlenfolge ist genau dann konvergent, wenn sie beschränkt ist.*

Beispiel 2.11 (Die Eulersche Zahl) *Wir betrachten die Zahlenfolge*

$$a_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\,.$$

Es folgt $a_{n+1} > a_n$, $n \in \mathbb{N}$, *und wegen* $\dfrac{1}{n!} \le \dfrac{1}{2^{n-1}}$

$$a_n \le 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^0 + \left(\frac{1}{2}\right)^1 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 1 + \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} < 1 + \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 3\,.$$

Nach Satz 2.10 gilt somit $(a_n)_{n=1}^\infty \in \mathbf{c}$. *Den Grenzwert dieser Zahlenfolge bezeichnet man mit e (Eulersche Zahl). Es ist*

$$e = 2{,}718281828459045\ldots$$

eine irrationale Zahl, d.h. $e \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Beispiel 2.12 *Es seien* $a > 0$ *und* $a_1 = \sqrt{a}$ *sowie* $a_{n+1} = \sqrt{a + a_n}$, $n \in \mathbb{N}$. *Wir wollen die Konvergenz dieser Folge beweisen. Offenbar gilt* $a_n < a_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$. *Wir behaupten, dass* $a_n < 1 + \sqrt{a}$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$ *gilt. Für* $n = 1$ *ist diese Aussage wahr. Es sei* $a_k < 1 + \sqrt{a}$. *Dann folgt*

$$a_{k+1} = \sqrt{a + a_k} < \sqrt{a + \sqrt{a} + 1} < \sqrt{(\sqrt{a}+1)^2} = 1 + \sqrt{a}\,,$$

womit die Behauptung bewiesen ist. Nach Satz 2.10 existiert $a^* := \lim a_n$, *wobei aus* $a_{n+1}^2 = a + a_n$ *folgt, dass*

$$(a^*)^2 = a + a^*\,, \text{d.h. } a^* = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + a}\,.$$

Definition 2.13 *Die Zahlen* $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, *für die eine Teilfolge* $(a_{k_n})_{n=1}^\infty$ *von* $(a_n)_{n=1}^\infty$ *mit* $a = \lim a_{k_n}$ *existiert, nennt man partielle Grenzwerte der Zahlenfolge* $(a_n)_{n=1}^\infty$.

Unter allen partiellen Grenzwerten einer Zahlenfolge gibt es einen kleinsten und einen grössten, die man mit $\liminf a_n$ bzw. $\limsup a_n$ bezeichnet.

Beispiel 2.14 *Die Zahlenfolge* $((-1)^n)_{n=1}^\infty$ *hat die partiellen Grenzwerte* -1 *und* 1 , *die Zahlenfolge* $([(-1)^n + 1]n)_{n=1}^\infty$ *die partiellen Grenzwerte* 0 *und* $+\infty$.

2.3 Zahlenreihen

Definition 2.15 *Ist* $(a_n)_{n=1}^\infty$ *eine Zahlenfolge, so nennt man die Summe* $s_n = a_1 + \cdots + a_n$ *die* n*-te* **Partialsumme** *dieser Folge. Die Folge* $(s_n)_{n=1}^\infty$ *der Partialsummen bezeichnet man mit* $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty a_n$, *und man nennt diese Folge auch* **Reihe** $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty a_n$. *Gilt* $s = \lim s_n$, *so schreibt man auch* $s = \displaystyle\sum_{n=1}^\infty a_n$. *(Doppelbezeichnung!!!) Existiert* $s = \lim s_n$ *und ist endlich, so sagt man, die Reihe* $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty a_n$ *ist* **konvergent**, *andernfalls nennt man die Reihe* **divergent**.

Beispiel 2.16 (Arithmetische Folgen und Reihen) *Eine Folge* $(a_n)_{n=1}^\infty$ *mit* $a_{n+1}-a_n = d$, $n \in \mathbb{N}$, *nennt man arithmetische Folge. Offenbar gilt* $a_n = a_1+(n-1)d$ *und wegen* $a_k+a_{n+1-k} = 2a_1 + (n-1)d$, $k = 1, \dots, n$,

$$s_n = \frac{1}{2}(s_n + s_n) = \frac{1}{2}\Big((a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \cdots + (a_n + a_1)\Big) = n \cdot \frac{2a_1 + (n-1)d}{2}$$

d.h. $s_n = n \cdot \dfrac{a_1 + a_n}{2}$.

Beispiel 2.17 (Geometrische Folgen und Reihen) *Eine Folge* $(a_n)_{n=0}^\infty$ *mit* $a_n = q \cdot a_{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$, *nennt man geometrische Folge. Es folgt* $a_n = a_0 q^n$ *und wegen der geometrischen Summenformel*

$$s_n := \sum_{k=0}^{n-1} a_k = \begin{cases} a_0 \dfrac{1-q^n}{1-q} & , \quad q \neq 1 \\ n \cdot a_0 & , \quad q = 1 \,. \end{cases}$$

Für $|q| < 1$ *gilt nach Beispiel 2.4*

$$\sum_{n=0}^\infty a_n = \sum_{n=0}^\infty a_0 q^n = \lim a_0 \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{a_0}{1-q} \,.$$

Beispiel 2.18 *Nach Beispiel 2.11 ist* $e = \displaystyle\sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n!}$.

Beispiel 2.19 (Die harmonische Reihe) *Wir betrachten die harmonische Reihe* $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n}$ *(vgl. Bem. 2.3). Für die* 2^k*-te Partialsumme gilt*

$$\begin{aligned} s_{2^k} &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{2^{k-1}+1} + \cdots + \frac{1}{2^k}\right) \\ &\geq 1 + \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{8} + \cdots + 2^{k-1} \cdot \frac{1}{2^k} \\ &= 1 + k \cdot \frac{1}{2} \,, \end{aligned}$$

woraus $\lim\limits_{k\to\infty} s_{2^k} = +\infty$ *und somit auch (Monotonie der Folge der Partialsummen!)*

$$\lim s_n = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n} = +\infty$$

folgt.

2.4 Übungsaufgaben

1. Zeigen Sie mit Hilfe der Definition, dass $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ mit $x_n = \dfrac{\sqrt{n}+1}{n^3}$ eine Nullfolge ist.

2. Berechnen Sie $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n^2 + 2\sqrt{n} + 1}{2n^2}$.

3. Untersuchen Sie, ob die angegebenen Folgen Nullfolgen sind, ob sie divergent, beschränkt oder konvergent sind. Geben Sie gegebenenfalls den Grenzwert an:

   (a) $a_n = 2^n$
   (b) $b_n = \frac{1}{n}$
   (c) $c_n = (-1)^n$
   (d) $d_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$
   (e) $e_n = \left(-\frac{1}{4}\right)^n$
   (f) $f_n = \sqrt[n]{n}$
   (g) $g_n = \sqrt{n} - \sqrt{n+1}$
   (h) $h_n = \sin\frac{1}{n}$
   (i) $i_n = \sin(n^2)$
   (j) $j_n = \sin(\pi n^2)$

4. Untersuchen Sie, ob die angegebenen Folgen konvergente Teilfolgen besitzen:

$$(a)\quad a_n = \sin\left(\frac{\pi n}{15}\right), \quad (b)\quad b_n = n\cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right), \quad (c)\quad c_n = \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1+(-1)^n}{2}.$$

5. Beweisen Sie, dass die Folge $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ mit

$$a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}$$

   konvergiert.

   Hinweis: Verwenden Sie den Satz über die Konvergenz monotoner Zahlenfolgen.

6. Berechnen Sie unter Verwendung der geometrischen Summenformel

$$(a)\ \sum_{n=0}^{10}\left(\frac{1}{3}\right)^n, \quad (b)\ \sum_{n=1}^{11}\left(\frac{1}{3}\right)^n, \quad (c)\ \sum_{n=12}^{20}\left(\frac{1}{3}\right)^n, \quad (d)\ \sum_{n=0}^{10}\left(\frac{3}{4}\right)^n.$$

7. Berechnen Sie die Summe der Reihen über die Folgen $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ und $(d_n)_{n=1}^{\infty}$ aus Aufgabe 3.

Kapitel 3

Finanzmathematik

3.1 Zins- und Zinseszinsrechnung

Vereinbarung: 1 Jahr = 360 Zinstage (1 Monat = 30 Zinstage)
$K_0 = K(0)$ - Anfangskapital (auch Barwert genannt),
$T \in \mathbb{N}$ - Laufzeit in Zinstagen,
p - Zinssatz (auch Zinsfuß genannt, in %),
$i = p/100$ - Zinsrate,
$q = 1 + i$ - Aufzinsungsfaktor
Der **Barwert** des Endkapitals $K_T = K(T)$ (auch **abgezinster** oder **diskontierter Wert** genannt) ist der Wert des Anfangskapitals, der bei gleichbleibender Verzinsung mit dem Zinssatz p nach einer Laufzeit von T Tagen genau den Wert $K(T)$ ergibt.

- **Einfache Verzinsung**

  Zinsen für den Zeitraum $[0, t]$, $t = T/360$: $Z(t) = K_0 i\, t$

  Kapital zum Zeitpunkt t (auch Zeitwert genannt): $K(t) = K_0(1 + i\, t)$

  Barwert des Kapitals $K(t)$: $\dfrac{K(t)}{1 + i\, t} = \dfrac{K\left(\frac{T}{360}\right)}{1 + \frac{i\, T}{360}}$

- **Ratenzahlung**

  r - Rate, R - Kapital zum Jahresende

  vorschüssig (Ratenzahlung zum Monatsanfang, beginnend im Januar):

$$
\begin{aligned}
R &= r\left(1 + i\,\frac{12}{12}\right) + r\left(1 + i\,\frac{11}{12}\right) + \cdots + r\left(1 + i\,\frac{1}{12}\right) \\
&= r\left(12 + i\,\frac{1}{12}\sum_{n=1}^{12} n\right) = r\left(12 + i\,\frac{13}{2}\right)
\end{aligned}
$$

  nachschüssig (Ratenzahlung zum Monatsende, beginnend im Januar):

$$
R = r\left(12 + i\,\frac{11}{2}\right)
$$

- **Zinseszinsrechnung**

  $n \in \mathbb{N}$ - Anzahl der Zinsperioden, $K_n := K(n)$

  $$K_1 = K_0(1+i) = K_0 q\,, \quad K_2 = K_1 q = K_0 q^2\,, \quad \cdots\,, \quad K_n = K_0 q^n$$

  Barwert des Endkapitals K_n: $\dfrac{K_n}{q^n}$

- Bewertung von Investitionen (**Kapitalwertmethode**)

  E_k - (geschätzte) Einnahmen zum Zeitpunkt k,

  A_k - (geschätzte) Ausgaben zum Zeitpunkt k,

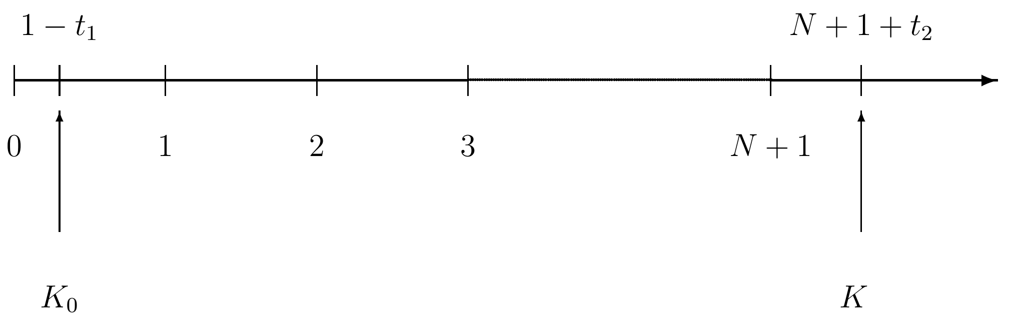
  $G_k = E_k - A_k\,,\ k = 0, 1, \ldots, n$

  Kapitalwert der Investition:

  $$K_{Inv} = G_0 + G_1 \frac{1}{q} + \cdots + G_n \frac{1}{q^n}$$

- **Gemischte Verzinsung**

  $t_1, t_2 \in (0,1)$,



  Endkapital: $K = K_0(1 + i\,t_1)(1+i)^N(1 + i\,t_2)$

- **Unterjährige Verzinsung mit Zinseszinsen**

  $\dfrac{1}{m}$ - unterjährige Zinsperiode, $m \in \mathbb{N}$, $K_{n,m}$ - Kapital nach n Jahren

  $$\begin{aligned} K_{1,m} &= K_0 \left(1 + \frac{i}{m}\right)^m \\ K_{2,m} &= K_{1,m} \left(1 + \frac{i}{m}\right)^m = K_0 \left(1 + \frac{i}{m}\right)^{2m} \\ &\vdots \\ K_{n,m} &= K_0 \left(1 + \frac{i}{m}\right)^{nm} \end{aligned}$$

Der **effektive Jahreszinssatz** i^* ist derjenige Jahreszinssatz, der bei jährlicher Verzinsung mit Zinseszinsen (ausgehend vom gleichen Anfangskapital K_0) zu gleichem $K_n = K_{n,m}$ führt. Wir erhalten

$$i^* = \left(1 + \frac{i}{m}\right)^m - 1\,.$$

Bei der **kontinuierlichen Verzinsung** ($m \longrightarrow \infty$) ist das Endkapital nach n Jahren gleich $K_0 e^{i\,n}$.

3.2 Rentenrechnung

Vereinbarung: Periode der Ratenzahlung = Zinsperiode
r - Rate, $n \in \mathbb{N}$ - Dauer der Ratenzahlungen (in Zinsperioden)

- **Vorschüssige Renten** (die Raten werden zu Periodenbeginn gezahlt)

  Rentenendwert: $E_n^{\text{vor}} = rq^n + rq^{n-1} + \cdots + rq = r \underbrace{q\frac{q^n - 1}{q - 1}}_{\text{REF}^{\text{vor}}}$

  REF^{vor} - vorschüssiger Rentenendwertfaktor

  Rentenbarwert (Abzinsung des Rentenendwertes auf den Zeitpunkt 0):

  $$B_n^{\text{vor}} = E_n^{\text{vor}} \frac{1}{q^n} = r \underbrace{\frac{1}{q^{n-1}} \frac{q^n - 1}{q - 1}}_{\text{RBF}^{\text{vor}}}$$

  RBF^{vor} - vorschüssiger Rentenbarwertfaktor

- **Nachschüssige Renten** (die Raten werden zum Ende der Zinsperiode gezahlt)

  Rentenendwert: $E_n^{\text{nach}} = rq^{n-1} + rq^{n-2} + \cdots + r = r \underbrace{\frac{q^n - 1}{q - 1}}_{\text{REF}^{\text{nach}}}$

  REF^{nach} - nachschüssiger Rentenendwertfaktor

  Rentenbarwert:

  $$B_n^{\text{nach}} = E_n^{\text{nach}} \frac{1}{q^n} = r \underbrace{\frac{1}{q^n} \frac{q^n - 1}{q - 1}}_{\text{RBF}^{\text{nach}}}$$

  RBF^{nach} - nachschüssiger Rentenbarwertfaktor

- **Ewige Renten**

  Vorschüssiger Rentenbarwert der ewigen Rente:

  $$B_\infty^{\text{vor}} = \lim_{n \to \infty} B_n^{\text{vor}} = \lim_{n \to \infty} rq \frac{1 - q^{-n}}{q - 1} = \frac{rq}{q - 1}$$

Diese Beziehung ergibt sich aber auch leicht aus der Formel

$$(B_\infty^{\text{vor}} - r)i = r\,.$$

Nachschüssiger Rentenbarwert der ewigen Rente:

$$B_\infty^{\text{nach}} = \lim_{n\to\infty} B_n^{\text{nach}} = \lim_{n\to\infty} r\frac{1-q^{-n}}{q-1} = \frac{r}{q-1}$$

Diese Beziehung ergibt sich aber auch leicht aus der Formel

$$B_\infty^{\text{nach}} i = r\,.$$

3.3 Tilgungsrechnung

Vereinbarungen:

- Ratenperiode = Zinsperiode
- n - Anzahl der Rückzahlungsperioden
- Zahlungen erfolgen am Periodenende

S_0 - Anfangsschuld, S_k - Restschuld am Ende der k-ten Periode,
T_k - Tilgung in der k-ten Periode, Z_k - Zinsen in der k-ten Periode,
$A_k = T_k + Z_k$ - Annuität in der k-ten Periode

- **Ratentilgung** (Tilgungsraten sind konstant)

$$T_k = T = \frac{S_0}{n}\,, \quad Z_k = S_{k-1}i$$

- **Annuitätentilgung** (Annuitäten sind konstant)

$$\begin{aligned}
S_1 &= S_0 - (A - iS_0) = S_0 q - A \\
S_2 &= S_1 q - A = S_0 q^2 - qA - A \\
&\vdots \\
S_n &= S_0 q^n - (q^{n-1} + \cdots + 1)A = S_0 q^n - \frac{q^n - 1}{q-1}A
\end{aligned}$$

3.4 Übungsaufgaben

1. Ein Vermögen V_0 unterliegt einer jährlichen Verzinsung von 4%, Abschreibung von 5% und Besteuerung von 1% jeweils auf das bzw. aus dem aktuellen Vermögen.
   (a) Geben Sie die Folge $(V_n)_{n=1}^{\infty}$ der Vermögenswerte nach n Jahren an.
   (b) Ermitteln Sie, nach wieviel Jahren ein Vermögen von V_0=200 000 EUR unter
      i. 100 000 EUR,
      ii. 10 000 EUR,
      iii. 1 000 EUR,
      iv. 100 EUR

      gefallen ist.
   (c) Beweisen Sie mit Hilfe der Definition, dass $(V_n)_{n=1}^{\infty}$ eine Nullfolge ist.

2. Mit welchem Zinssatz muss Kapital angelegt werden, damit es sich nach 20 Jahren vervierfacht hat?

3. Das Vermögen $V_0 = 1\,000$ EUR sei bei einer Bank für ein Jahr angelegt. Für die Zinszahlungen stehen verschiedene Varianten zur Verfügung:
   (a) Am Ende des Jahres mit 10%,
   (b) nach jeweils 6 Monaten mit je 5%,
   (c) nach jeweils 3 Monaten mit je 2,5%.

   Berechnen Sie das Vermögen am Ende des Jahres. Finden Sie eine Formel für das Endvermögen in Abhängigkeit von der Anzahl n der Zahlungen pro Jahr. Untersuchen Sie, was passiert, wenn n immer größer wird.

4. Gegeben sei ein Kapitalstock von 100 000 EUR. Dieser wird jeweils am Jahresende mit 8% verzinst und es werden 17 401,47 EUR entnommen. Geben Sie die Folge der Geldbeträge an, die am Anfang jedes Jahres vorhanden sind. Zeigen Sie, dass am Anfang des neunten Jahres das Kaptial verbraucht ist.

5. Eine Bank verzinst Einlagen mit jährlich 5% ($p = 5\,,\ i = 0,05\,,\ q = 1,05$).
   (a) Auf welchen Wert wächst ein Anfangskapital von 7 000 EUR innerhalb eines Dreivierteljahres an?
   (b) Welcher Betrag muss angelegt werden, damit ein Jahr später eine Summe von 10 000 EUR zur Verfügung steht?
   (c) In welcher Zeit bringt ein Kapital von 20 000 EUR Zinsen in Höhe von 723 EUR?

   Hinweis: Die Bank berechnet unterjährige Zinsen vereinfacht nach dem linearen Ansatz.

6. Ein Anlagefond bietet ein Produkt, bei dem monatlich 0,4% Zinsen gutgeschrieben werden. Welchen effektiven Jahreszins zahlt der Fond?

7. Man bewerte folgende fünfjährige Anleihe. Der Marktzins sei 5%.

k	1	2	3	4	5
G_k	4	4	5	5	106

8. Der Informatikstudent Ingo will sich in zwei Jahren ein neues Computersystem kaufen. Er rechnet mit einem Preis von mindestens 2 000 EUR. Er hat bereits 1 000 EUR. Durch kleine Programmieraufträge kann er in einem Jahr noch einmal 1 000 EUR erwirtschaften. Vom Kreditinstitut K hat er ein Angebot erhalten, in dem er 1 000 EUR sofort und ein Jahr später noch einmal 1 000 EUR einzahlen müsste. Das angelegte Geld würde jährlich mit 5% verzinst. Andererseits hat er von der Bank B ein Angebot bekommen, bei dem er sofort 1 950 EUR einzahlen müsste und diese Summe mit 5,2% p.a. verzinst wird. Sein Feund Frank hat angeboten, Ingo die fehlenden 950 EUR zu geben, wenn er ein Jahr später 1 000 EUR zurückbekommt.

   (a) Was für einen (effektiven) Zinssatz verlangt Frank?

   (b) Für welches Angebot soll sich Ingo entscheiden? Wieviel Geld hätte er dann zur Verfügung?

9. Der erfolgreiche Unternehmer U will sich in 10 Jahren ein Haus bauen. Die Kosten dafür und für das Grundstück schätzt er auf 250 000 EUR. U möchte den halben Betrag in den nächsten 10 Jahren ansparen und die zweite Hälfte als Kredit aufnehmen, den er innerhalb von 10 Jahren abzahlt.

   (a) Wie hoch muss die Einzahlung am Ende jeden Jahres sein, wenn das Geld mit 6% p.a. verzinst wird?

   (b) Wieviel müsste U (nachschüssig) monatlich einzahlen?

   (c) Welcher Anteil der angesparten 125 000 EUR ist bei monatlicher/jährlicher Zahlung aus Zinsen entstanden?

   (d) Wieviel Euro muss U jährlich aufbringen, wenn er den Kredit in 10 gleichen Zahlungen abtragen will und der jährliche Zins 6% p.a. beträgt?

Kapitel 4

Differentialrechnung für reellwertige Funktionen einer reellen Veränderlichen

4.1 Grundlegende Begriffe

Unter einer **reellwertigen Funktion einer reellen Veränderlichen** (kurz auch “reelle Funktion” genannt) verstehen wir eine Abbildung $f: A \longrightarrow B$, $x \mapsto f(x)$, wobei A und B Teilmengen der Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen sind. Hier werden wir vorwiegend den Fall betrachten, dass $A = [a, b]$ bzw. $A = (a, b)$ ist. Die Menge $\{(x, f(x)) : x \in A\} \subset \mathbb{R}^2$ nennt man den **Graph** der Funktion $f: A \longrightarrow B$, den man sich als Kurve in der x-y-Ebene $\{(x, y) : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^2$ vorstellen kann.
Es gibt nun einige Begriffe, die vor allem das Wachstumsverhalten der Funktion (bzw. ihres Graphen) genauer beschreiben sollen. Man nennt $f: A \longrightarrow B$

- **monoton** wachsend (bzw. fallend), wenn $f(x_1) \le f(x_2)$ (bzw. $f(x_1) \ge f(x_2)$) für alle $x_1, x_2 \in A$ mit $x_1 < x_2$ gilt,

- **streng monoton** wachsend (bzw. fallend), wenn $f(x_1) < f(x_2)$ (bzw. $f(x_1) > f(x_2)$) für alle $x_1, x_2 \in A$ mit $x_1 < x_2$ gilt,

- nach oben (bzw. unten) **beschränkt**, wenn eine Zahl $M \in \mathbb{R}$ existiert, so dass $f(x) \le M$ (bzw. $f(x) \ge M$) für alle $x \in A$ gilt,

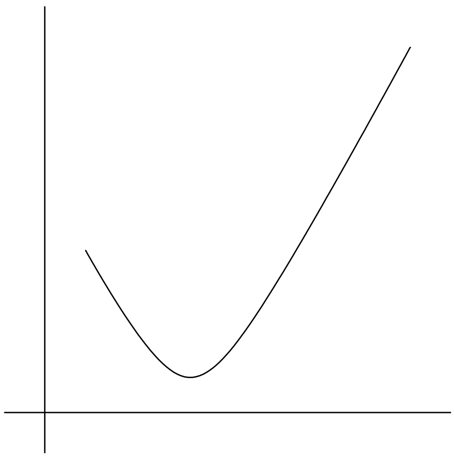
- **beschränkt**, wenn sie nach oben und nach unten beschränkt ist, d.h. wenn ein $M \in \mathbb{R}$ existiert, so dass $|f(x)| \le M$ für alle $x \in A$ gilt,

- **streng konvex**, wenn $f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) < \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2)$ für alle $x_1, x_2 \in A$, $x_1 \ne x_2$ und $\lambda \in (0, 1)$ gilt,

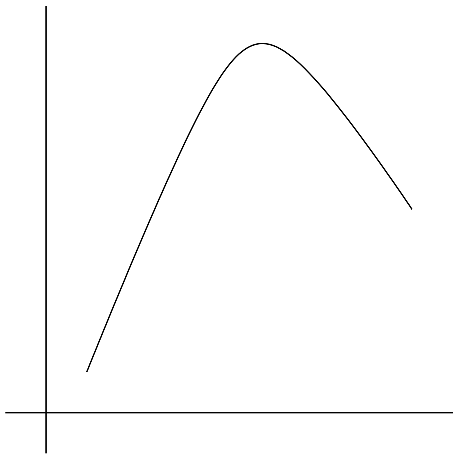
- **streng konkav**, wenn $f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) > \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2)$ für alle $x_1, x_2 \in A$, $x_1 \ne x_2$ und $\lambda \in (0, 1)$ gilt, Zur Veranschaulichung der Begriffe “konvex” und “konkav” beachte man die Relation

$$\{\lambda a + (1-\lambda)b : \lambda \in (0,1)\} = (a,b)\,,$$

falls $a < b$, denn für $\lambda \in (0,1)$ gilt $a = \lambda a + (1-\lambda)a < \lambda a + (1-\lambda)b < \lambda b + (1-\lambda)b = b$ und für $a < x < b$ und $\lambda = \dfrac{b-x}{b-a}$ gilt $\lambda a + (1-\lambda)b = x$. Die Eigenschaft der Konvexität bzw. Konkavität impliziert also, dass mit $x_1, x_2 \in A$ auch das Intervall mit diesen Endpunkten ganz in A liegt.



konvexe Funktion



konkave Funktion

Beispiel 4.1 *Wir betrachten für eine gegebene reelle Zahl b die Funktion $f : (0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x^b$.*

1. *Für $b = n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, ist f streng monoton wachsend, streng konvex, nach unten beschränkt und nach oben unbeschränkt. Die strenge Konvexität ergibt sich für $n = 2$ wegen $2x_1x_2 < x_1^2 + x_2^2$ aus*

$$\begin{aligned}[\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2]^2 &= \lambda^2 x_1^2 + 2\lambda(1-\lambda)x_1x_2 + (1-\lambda)^2 x_2^2 \\ &< \lambda^2 x_1^2 + \lambda(1-\lambda)x_1^2 + \lambda(1-\lambda)x_2^2 + (1-\lambda)^2 x_2^2 \\ &= \lambda x_1^2 + (1-\lambda)x_2^2\,.\end{aligned}$$

Für beliebige $n \geq 2$ könnte man folgende Überlegung anstellen: Im Fall stetiger Funktionen $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ (siehe Def. 4.7) ist die strenge Konvexität äquivalent zu der Bedingung

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) < \frac{1}{2}\left[f(x_1) + f(x_2)\right] \quad \forall\, x_1, x_2 \in (a,b)\,,\ x_1 \neq x_2\,.$$

Aus dem binomischen Satz folgt nun

$$\left(\frac{1}{2} + x\right)^n + \left(\frac{1}{2} - x\right)^n > \frac{1}{2^{n-1}}\,,$$

falls $x \neq 0$. *Für* $x = \dfrac{x_1}{x_1+x_2} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{x_2}{x_1+x_2}$ *ergibt sich daraus*

$$\left(\frac{x_1}{x_1+x_2}\right)^n + \left(\frac{x_2}{x_1+x_2}\right)^n > \frac{1}{2^{n-1}},$$

also

$$\frac{1}{2}(x_1^n + x_2^n) > \left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^n .$$

2. *Für* $b = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, *definieren wir* $y = x^b$ *als die positive Zahl, für die* $x = y^n$ *gilt. In diesem Fall ist* f *ebenfalls streng monoton wachsend, nach unten beschränkt und nach oben unbeschränkt, aber streng konkav, was sich wegen der strengen Konvexität im Fall* $b = n$ *aus*

   $$\left[\lambda x_1^{\frac{1}{n}} + (1-\lambda)x_2^{\frac{1}{n}}\right]^n < \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$$

   ergibt.

3. *Für* $n \in \mathbb{Z}$, $n < 0$, *ist* f *streng monoton fallend, nach unten beschränkt, nach oben unbeschränkt und konvex.*

4. *Man kann nun* x^b *für* $b = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ $(m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N})$ *als* $(x^m)^{\frac{1}{n}}$ *definieren. Unter Verwendung des Intervallschachtelungsprinzips lässt sich* x^b *auch für beliebige* $b \in \mathbb{R}$ *erklären. Insbesondere erhält man für* $b > 1$ *strenges monotones Wachstum und strenge Konvexität, d.h. ein überproportionales Wachstum, und für* $0 < b < 1$ *strenges monotones Wachstum und strenge Konkavität, d.h. unterproportionales Wachstum.*

Bemerkung 4.2 *Für die Untersuchung differenzierbarer Funktionen (siehe Def. 4.11) auf Konvexität bzw. Konkavität ist folgende Überlegung wichtig: Aus der geometrischen Interpretation der Konvexitätseigenschaft ergibt sich, dass* $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ *streng konvex (bzw. konkav) ist, wenn der Anstieg* $s(x_1,x_2)$ *der Geraden durch* $(x_1, f(x_1))$ *und* $(x_2, f(x_2))$

$$s(x_1,x_2) = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$$

für jedes feste $x_1 \in (a,b)$ *bzgl.* $x_2 \in (a,b)$ *streng monoton wachsend (bzw. fallend) ist. Damit lassen sich auch die Funktionen aus Beispiel 4.1, 1. untersuchen, denn*

$$\frac{x_1^n - x_2^n}{x_1 - x_2} = x_1^{n-1} + x_1^{n-2}x_2 + \cdots + x_1^{n-2}x_2 + x_2^{n-1}$$

ist offenbar streng monoton wachsend in $x_2 \in (0,\infty)$ *für festes* $x_1 \in (0,\infty)$.

Ist $f : A \longrightarrow B$ nach oben durch die Zahl M beschränkt, so nennt man M eine **obere Schranke** dieser Funktion. Unter allen oberen Schranken gibt es eine kleinste, die man **obere Grenze** der Funktion nennt und mit $\sup\{f(x) : x \in A\}$ bezeichnet. Analog erklärt man die **untere Grenze** $\inf\{f(x) : x \in A\}$. Falls ein $x^* \in A$ existiert, so dass $f(x^*) = \sup\{f(x) : x \in A\}$ gilt, d.h. $f(x) \leq f(x^*)\ \forall\, x \in A$, so nennt man x^* einen **globalen Extremalpunkt** und $f(x^*)$

ein **globales Maximum** der Funktion $f : A \longrightarrow B$. Analog definiert man den Begriff des **globalen Minimums**. Man nennt $x^* \in A$ einen **lokalen Extremalpunkt** und $f(x^*)$ ein **lokales Extremum** der Funktion $f : A \longrightarrow B$, falls ein $\varepsilon > 0$ existiert, so dass x^* ein globaler Extremalpunkt von $f : (x^* - \varepsilon, x^* + \varepsilon) \cap A \longrightarrow B$ ist.

Beispiel 4.3 *Die Funktion* $f : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto 1 + \frac{1}{x^2}$ *besitzt keine Extremalpunkte. Es gilt*

$$\inf \{f(x) : x \in (0, \infty)\} = 1 , \quad \sup \{f(x) : x \in (0, \infty)\} = \infty .$$

Für die Funktion $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{1 + x^2}$ *ist* $g(0) = 1$ *globales Maximum und*

$$\inf \{g(x) : x \in \mathbb{R}\} = 0 , \quad \textit{aber} \quad g(x) > 0 \; \forall \, x \in \mathbb{R} .$$

Die Funktion $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x(x^2 - 3)$ *ist nach oben und unten unbeschränkt, hat aber das lokale Maximum* $h(-1) = 2$ *und das lokale Minimum* $h(1) = -2$.

Nach Satz 1.9 besitzt die Funktion $f : A \longrightarrow B$ genau dann eine Umkehrfunktion $f^{-1} : B \longrightarrow A$ (d.h. $f^{-1}(f(x)) = x \; \forall \, x \in A$ und $f(f^{-1}(y)) = y \; \forall \, y \in B$), wenn sie bijektiv ist. In diesem Fall ergibt sich der Graph von f^{-1} durch Spiegelung des Graphen von f an der Geraden $y = x$.

Beispiel 4.4 *Da die Funktion* $f : [0, \infty) \longrightarrow (0, 1]$, $x \mapsto \frac{1}{1 + x^2}$ *streng monoton fallend ist und* $f([0, \infty)) = (0, 1]$ *gilt, existiert die Umkehrfunktion. Löst man die Gleichung*

$$y = \frac{1}{1 + x^2} , \quad x \in [0, \infty) ,$$

nach x *auf, so erhält man* $x = \sqrt{\frac{1}{y} - 1}$ *und somit die Umkehrfunktion* $f^{-1} : (0, 1] \longrightarrow [0, \infty)$, $x \mapsto \sqrt{\frac{1}{x} - 1}$.

Definition 4.5 $a^* \in \mathbb{R}$ *oder* $a^* = \pm\infty$ *heißt* **Grenzwert** *der Funktion* $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ *im Punkt* $x^* \in \mathbb{R}$ *oder in* $x^* = \pm\infty$ *(in Zeichen:* $\lim\limits_{x \to x^*} f(x) = a^*$*), wenn aus* $x_n \in A \setminus \{x^*\}$, $n \in \mathbb{N}$, *und* $x_n \longrightarrow x^*$ *stets* $f(x_n) \longrightarrow a^*$ *folgt.*

Beispiel 4.6 *Für die Funktion* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{1 + x^2}$ *gilt* $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$. *Auch folgende Grenzwerte sind bekannt:*

$$\lim_{x \to \pm\frac{\pi}{2}, \, |x| < \frac{\pi}{2}} \tan x = \pm\infty , \quad \lim_{x \to \pm\infty} \arctan x = \pm\frac{\pi}{2} .$$

Definition 4.7 *Die Funktion* $f : A \longrightarrow B$ *heißt im Punkt* $x^* \in A$ *stetig, wenn sie in diesem Punkt einen Grenzwert besitzt und dieser mit dem Funktionswert übereinstimmt, d.h.*

$$\lim_{x \to x^*} f(x) = f(x^*) .$$

Die Funktion $f : A \longrightarrow B$ *nennt man stetig, wenn sie in jedem Punkt* $x^* \in A$ *stetig ist.*

Die Funktionen im Beispiel 4.1 sind stetige Funktionen. Auch die Funktionen $\sin x$, $\cos x$ und e^x sind auf $\mathbb{R}$ stetige Funktionen, $\ln x$ ist auf $(0,\infty)$ definiert und stetig. Aus den Regeln für das Rechnen mit Grenzwerten von Zahlenfolgen ergibt sich, dass aus der Stetigkeit zweier Funktionen $f : A \longrightarrow B$ und $g : A \longrightarrow B$ auch die Stetigkeit der Summe, der Differenz und des Produktes sowie im Fall $g(x) \neq 0$, $x \in A$, auch des Quotienten dieser Funktionen folgt. Auch die Verkettung zweier stetiger Funktionen ist wieder stetig.

Beispiel 4.8 *Offenbar gelten für* $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ *die Ungleichungen*

$$0 < \sin x < x < \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}\,,$$

so dass

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

gilt. Unter Verwendung der Stetigkeit von $\cos x$ *und der Beziehung* $\sin(-x) = -\sin x$ ($\sin x$ *ist eine ungerade Funktion) folgt*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1\,. \tag{4.1}$$

Satz 4.9 (Zwischenwertsatz für stetige Funktionen) *Es seien* $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *stetig und* $f(a) < f(b)$ *(bzw.* $f(a) > f(b)$*). Dann existiert für jedes* $c \in (f(a), f(b))$ *(bzw.* $c \in (f(b), f(a))$*) ein* $\xi \in (a,b)$ *mit* $f(\xi) = c$.

Satz 4.10 *Sei* $-\infty < a < b < \infty$. *Ist* $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *stetig, so existieren* $x_{\min} \in [a,b]$ *und* $x_{\max} \in [a,b]$ *mit der Eigenschaft*

$$f(x_{\min}) \le f(x) \le f(x_{\max}) \quad \forall\, x \in [a,b]\,.$$

4.2 Differenzierbare Funktionen

Die Lösung verschiedenster Probleme führt auf den Begriff der Ableitung einer Funktion. Im folgenden seien exemplarisch drei solche Aufgabenstellungen vorgestellt:

1. Ein geometrisches Problem

   Es sei der Anstieg der Tangente an den Graphen $\{(x, f(x)) : a < x < b\}$ einer Funktion $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ im Punkt $(x_0, f(x_0))$ gesucht, wobei x_0 ein Punkt aus dem Intervall (a,b) sei. Da der Anstieg der Geraden durch die Punkte $(x_0, f(x_0))$ und $(x_0 + h, f(x_0 + h))$, wobei $x_0 + h \in (a,b)$ erfüllt sei, gleich dem **Differenzenquotienten**

   $$\frac{f(x_0 + h)) - f(x_0)}{h}$$

   ist, kann man den Anstieg der Tangente als den Grenzwert dieses Differenzenquotienten für $h \longrightarrow 0$ definieren, falls dieser existiert. Diesen Grenzwert nennt man dann Ableitung der Funktion f im Punkt x_0 und bezeichnet ihn mit $f'(x_0)$.

2. Ein physikalisches Problem

   Es sei der Ort $s(t)$ eines sich geradlinig bewegenden Punktes in Abhängigkeit von der Zeit t gegeben und seine (Momentan-)Geschwindigkeit $v(t)$ zum Zeitpunkt t gesucht. Da man als mittlere Geschwindigkeit des Punktes im Zeitintervall $[t, t+\Delta t]$ den Differenzenquotienten

   $$\frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t}$$

   ansehen kann, ist die Geschwindigkeit des Punktes zum Zeitpunkt t gleich dem Grenzwert dieses Differenzenqotienten für $\Delta t \longrightarrow 0$ zu setzen, also $v(t) = s'(t)$.

3. Ein einfaches Populationsmodell

   Mit $P(t)$ sei die (unbekannte) Größe einer Population zum Zeitpunkt t bezeichnet, wobei die Größe $P_0 = P(0)$ zum Zeitpunkt $t = 0$ gegeben sei. Nach welchem Gesetz könnte man $P(t)$ für $t > 0$ voraussagen. Um ein solches Gesetz zu finden, nehmen wir an, dass die Zunahme der Population in einem Zeitintervall $[t, t+\Delta t]$ proportional zur Länge des Zeitintervalls und zur Größe der Population ist. Den entsprechenden Proportionalitätsfaktor nennt man Geburtenrate, wir bezeichnen ihn mit k. Es folgt also

   $$P(t+\Delta t) - P(t) \approx k\,P(t)\Delta t$$

   bzw.

   $$\frac{P(t+\Delta t) - P(t)}{\Delta t} \approx k\,P(t)\,.$$

   Es ist anzunehmen, dass diese ungefähre Gleichheit für $\Delta t \longrightarrow 0$ in eine Gleichheit übergeht. Wir erhalten also eine sogenannte Differentialgleichung

   $$P'(t) = k\,P(t)\,,$$

   d.h. eine Gleichung für die gesuchte Funktion $P(t)$, in der auch die Ableitung $P'(t)$ der gesuchten Funktion vorkommt. Diese Funktion hat zusätzlich die Bedingung $P(0) = P_0$ zu erfüllen. Bekanntlich ist $P(t) = P_0 e^{k\,t}$ die einzige Lösung dieses Problems. Offenbar ist dieses Modell ein sehr einfaches, was auch dadurch zum Ausdruck kommt, dass nur folgende drei qualitativ unterschiedlichen Entwicklungsgesetze der Population möglich sind:

   (a) Konstante Population für alle Zeiten. ($k = 0$)

   (b) Die Population stirbt (exponentiell) aus für $t \longrightarrow \infty$. ($k < 0$)

   (c) Die Population wächst (exponentiell) für $t \longrightarrow \infty$ über alle Maßen. ($k > 0$)

   Eine Verfeinerung dieses Modells, bei der von einer optimalen Populationsgröße P_{opt} (die den vorhandenen Ressourcen entspricht) ausgegangen wird, führt auf die Differentialgleichung

   $$P'(t) = k\,P(t)[P_{\mathrm{opt}} - P(t)]\,.$$

Definition 4.11 *Die Funktion $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt im Punkt $x_0 \in (a,b)$ differenzierbar mit der Ableitung $f'(x_0)$, wenn*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \in \mathbb{R} \tag{4.2}$$

gilt. Sie heißt auf (a,b) differenzierbar, wenn sie in jedem Punkt $x_0 \in (a,b)$ differenzierbar ist.

Die Bedingung (4.2) ist äquivalent zu

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)\,.$$

Die Zahl $f'(x_0)$ gibt den Anstieg der Tangente im Punkt $(x_0, f(x_0))$ an den Graphen der Funktion an. Diese Tangente genügt der Geradengleichung

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)\,, \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Offenbar ist die Ableitung einer konstanten Funktion gleich 0.

Beispiel 4.12 *Wir untersuchen die Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x^n$ für $n \in \mathbb{N}$ auf Differenzierbarkeit. Aus*

$$\frac{(x_0 + h)^n - x_0^n}{h} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x_0^{n-k} h^{k-1} = n x_0^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} x_0^{n-2} h + \cdots + h^{n-1}$$

folgt $f'(x_0) = n x_0^{n-1}$.

Beispiel 4.13 *Aus (4.1) folgt für $f(x) = \sin x$ die Formel $f'(0) = 1$.*

Folgerung 4.14 *Ist $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ in $x_0 \in (a,b)$ differenzierbar, so gilt*

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + h(x, x_0)(x - x_0) \tag{4.3}$$

mit $\lim\limits_{x \to x_0} h(x, x_0) = 0$, denn es ist

$$h(x, x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0)\,.$$

Die Beziehung (4.3) zeigt, dass f in x_0 stetig ist.

Folgerung 4.15 (Differentiationsregeln) *Es seien $f, g : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ im Punkt $x_0 \in (a,b)$ differenzierbar. Dann sind auch die Funktionen $\alpha f + \beta g$ für beliebige $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und fg in x_0 differenzierbar, wobei*

$$(\alpha f + \beta g)'(x_0) = \alpha f'(x_0) + \beta g'(x_0)$$

und

$$(f\,g)'(x_0) = f'(x_0) g(x_0) + f(x_0) g'(x_0) \quad \text{(Produktregel)}$$

gilt. Ist $g(x_0) \neq 0$, so ist

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}. \quad \text{(Quotientenregel)}$$

Sind $f : (a,b] \longrightarrow (c,d)$ in $x_0 \in (a,b)$ und $g : (c,d) \longrightarrow \mathbb{R}$ in $f(x_0) \in (c,d)$ differenzierbar, so ist $g \circ f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ in x_0 differenzierbar, wobei

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0) \quad \text{(Kettenregel)}$$

gilt.

Beweis. Den Beweis für diese Regeln gewinnt man aus den Formeln

$$\frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\, g(x) + f(x_0)\, \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0},$$

$$\frac{\dfrac{f(x)}{g(x)} - \dfrac{f(x_0)}{g(x_0)}}{x - x_0} = \frac{f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x)}{(x - x_0)g(x)g(x_0)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\,\frac{g(x_0)}{g(x)g(x_0)} - \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}\,\frac{f(x_0)}{g(x)g(x_0)}$$

und, für $h(x) = g(f(x))$, $y_0 = f(x_0)$ sowie $k = f(x_0 + h) - f(x_0)$,

$$\frac{h(x) - h(x_0)}{h} = \frac{g(y_0 + k) - g(y_0)}{k}\,\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

unter Anwendung der Regeln für das Rechnen mit Grenzwerten. □

Satz 4.16 (Ableitung der Umkehrfunktion) *Ist $g : (c,d) \longrightarrow (a,b)$ die Umkehrfunktion zu der auf (a,b) differenzierbaren Funktion $f : (a,b) \longrightarrow (c,d)$ mit $f'(x) \neq 0\ \forall\, x \in (a,b)$, so ist g auf (c,d) differenzierbar, und es gilt*

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))} \quad \forall\, x \in (c,d). \tag{4.4}$$

Die Formel (4.4) ergibt sich aus $f(g(x)) = x$ und der Kettenregel. (Der Beweis der Differenzierbarkeit von g muss aber vorher geführt werden!)

Beispiel 4.17 *Wir betrachten die Funktionen aus Bsp. 4.1, 2.-4. und verwenden die Formel aus Bsp. 4.12:*

1. $m \in \mathbb{N}$, $f(x) = x^{-m} = \dfrac{1}{x^m}$, $x_0 \neq 0$: *Aus der Quotientenregel folgt*

$$f'(x_0) = -\frac{m x_0^{m-1}}{x_0^{2m}} = (-m)x_0^{-m-1}.$$

2. *$n \in \mathbb{N}$: Die Funktion $g(x) = x^{\frac{1}{n}}$, $x > 0$, ist die Umkehrfunktion zu $f(x) = x^n$, $x > 0$. Aus Satz 4.16 folgt somit*

$$g'(x_0) = \frac{1}{f'(g(x_0))} = \frac{1}{n\left(x_0^{\frac{1}{n}}\right)^{n-1}} = \frac{1}{nx_0^{1-\frac{1}{n}}} = \frac{1}{n}x_0^{\frac{1}{n}-1} .$$

3. *$r = \dfrac{m}{n}$, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, $f(x) = x^r = \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^m$, $x > 0$: Aus der Kettenregel folgt*

$$f'(x_0) = m\left(x_0^{\frac{1}{n}}\right)^{m-1}\frac{1}{n}x_0^{\frac{1}{n}-1} = \frac{m}{n}x_0^{\frac{m-1}{n}+\frac{1}{n}-1} = rx_0^{r-1} .$$

4. *Um diese Formel auch für beliebige $r \in \mathbb{R}$ zu beweisen, gehen wir wie folgt vor:*
   (a) *Es ist bekannt, dass $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ gilt. Unter Verwendung dieser Beziehung kann man zeigen, dass $\lim\limits_{x\to 0}(1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$ gilt, woraus man wegen der Stetigkeit der Potenzfunktion $x \mapsto x^b$ auch*

   $$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{b}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1 + \frac{b}{n}\right)^{\frac{n}{b}}\right]^b = e^b \quad \forall\, b \in \mathbb{R}$$

   erhält.

   (b) *Es folgt wegen der Stetigkeit der Logarithmusfunktion*

   $$\lim_{h\to 0}\frac{\ln(1+h)}{h} = \lim_{h\to 0}\ln\left[(1+h)^{\frac{1}{h}}\right] = \ln e = 1 .$$

   Die Funktion $f : (0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \ln x$, ist also im Punkt $x_0 = 1$ differenzierbar, wobei $f'(1) = 1$ gilt.

   (c) *Für einen beliebigen Punkt $x_0 > 0$ erhalten wir*

   $$f'(x_0) = \lim_{h\to 0}\frac{\ln(x_0+h) - \ln x_0}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\ln\left(1 + \frac{h}{x_0}\right)}{\frac{h}{x_0}}\frac{1}{x_0} = \frac{1}{x_0} .$$

   (d) *Aus der Formel für die Ableitung der Umkehrfunktion erhalten wir für $g(x) = e^x$*

   $$g'(x_0) = \frac{1}{\frac{1}{g(x_0)}} = e^{x_0} .$$

   (e) *Wir schreiben $h(x) = x^r = e^{r\ln x}$, $x > 0$, und erhalten aus der Kettenregel*

   $$h'(x_0) = e^{r\ln x_0}\,r\,\frac{1}{x_0} = rx_0^{r-1} .$$

Beispiel 4.18 *Aus* $1-\cos x = 2\sin^2\frac{x}{2}$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ *und der Stetigkeit der Sinusfunktion folgt*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{x} = -\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\sin\frac{x}{2} = 0\,,$$

d.h. für $f(x) = \cos x$ *gilt* $f'(0) = 0$. *Aus dem Additionstheorem*

$$\sin x = \sin(x - x_0)\cos x_0 + \cos(x - x_0)\sin x_0$$

sowie der Produkt- und der Kettenregel folgt somit für $g(x) = \sin x$

$$g'(x_0) = g'(0)\cos x_0 + f'(0)\sin x_0 = \cos x_0\,.$$

Analog zeigt man $f'(x_0) = -\sin x_0$.

4.3 Der Mittelwertsatz der Differentialrechnung

Satz 4.19 (Fermat) *Ist* $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ *differenzierbar, so folgt aus* $x_0 \in (a,b)$ *und* $f(x) \le f(x_0)$ (*bzw.* $f(x) \ge f(x_0)$) $\forall\, x \in (a,b)$, *dass* $f'(x_0) = 0$ *gilt.*

Beweis. Wäre z.B. $f'(x_0) > 0$, so würde aus der Definition der Ableitung $f'(x_0)$ die Existenz eines $\delta > 0$ folgen, so dass für alle x_1, x_2 mit $x_0 - \delta < x_1 < x_0 < x_2 < x_0 + \delta$

$$f(x_1) < f(x_0) < f(x_2)$$

gilt, was der Voraussetzung widerspricht. □

Satz 4.20 (Rolle) *Ist* $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *stetig und auf* (a,b) *differenzierbar sowie* $f(a) = f(b)$, *so existiert ein* $c \in (a,b)$ *mit* $f'(c) = 0$.

Beweis. Nach Satz 4.10 existieren $x_{\min}, x_{\max} \in [a,b]$ mit $m := f(x_{\min}) \le f(x) \le f(x_{\max}) =: M$ $\forall\, x \in [a,b]$. Ist $m = M$, so ist $f \equiv \text{const}$ und somit der Satz richtig. Ist $m < M$, so liegt wenigstens einer der Punkte $x_{\min}$ und $x_{\max}$ im offenen Intervall (a,b), da $f(a) = f(b)$. Der Satz von Fermat liefert die Behauptung. □

Satz 4.21 (1. und 2. MWS der Differentialrechnung) *Es seien* $f, g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *stetige und auf* (a,b) *differenzierbare Funktionen mit* $g'(x) \ne 0$ $\forall\, x \in (a,b)$. *Dann existieren* $\xi, \eta \in (a,b)$, *sodass*

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a) \quad \textit{und} \quad \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\eta)}{g'(\eta)}\,.$$

Beweis. Wir wenden auf die Funktion $F(x) = f(x) - f(a) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$ den Satz von Rolle an und erhalten die Existenz eines $\xi \in (a,b)$ mit $F'(\xi) = 0$, wobei

$$F'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

gilt. Ebenfalls aus dem Satz von ROLLE folgt, dass wegen $g'(x) \neq 0 \; \forall \, x \in (a,b)$ die Beziehung $g(a) \neq g(b)$ gilt. Es bleibt nur noch der Satz von ROLLE auf die Funktion

$$G(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}[g(x) - g(a)]$$

anzuwenden. □

4.4 Anwendungen der Differentialrechnung

4.4.1 Die l'Hospitalsche Regel

Die reellen Funktionen f und g seien in $x_0 \in (a,b)$ differenzierbar, und es sei $f(x_0) = g(x_0) = 0$. Aus der Definition der Ableitung folgt dann

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \, \frac{x - x_0}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} \,,$$

falls $g'(x_0) \neq 0$. Diese Überlegungen lassen sich zu folgendem Satz weiter verallgemeinern. Wir schreiben "$x \longrightarrow a + 0$" für "$x \longrightarrow a$ und $x > a$" sowie "$x \longrightarrow b - 0$" für "$x \longrightarrow b$ und $x < b$".

Satz 4.22 (L'HOSPITAL) *Es seien $f, g : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar und*

$$\lim_{x \to b-0} f(x) = \lim_{x \to b-0} g(x) = 0$$

($b = +\infty$ ist zugelassen). Dann gilt

$$\lim_{x \to b-0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to b-0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \,,$$

falls der rechte Grenzwert existiert oder gleich $\pm\infty$ ist. (Für $x \to a+0$ gilt eine analoge Aussage.)

Beispiel 4.23

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right) &= \lim_{x \to 0} \frac{\sin x - x}{x \sin x} \\ &= \lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{\sin x + x \cos x} = \lim_{x \to 0} \frac{-\sin x}{2 \cos x - x \sin x} = \frac{0}{2} = 0 \,. \end{aligned}$$

4.4.2 Taylorsche Formel und Taylorentwicklung

Ist $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ auf (a,b) differenzierbar, so nennen wir die Ableitung der Funktion

$$f' : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R} \,, \; x \mapsto f'(x)$$

die **zweite Ableitung** der Funktion f und bezeichnen sie mit

$$f'' : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R} \,, \; x \mapsto f''(x) := (f')'(x) \,.$$

Allgemein ist die **k-te Ableitung** von f die erste Ableitung der $(k-1)$-ten Ableitung von f, d.h. $f^{(k)} := (f^{(k-1)})'$. Die k-te Ableitung von f bezeichnet man auch mit $\dfrac{d^k f}{dx^k}$.

Beispiel 4.24 *Für* $f(x) = x^m$, $m \in \mathbb{N}$, *gilt*

$$f^{(k)}(x) = \begin{cases} m(m-1)\cdots(m-k+1)x^{m-k} & , \quad k = 1, \ldots, m\,, \\ 0 & , \quad k > m\,. \end{cases}$$

Wir betrachten ein Polynom

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

als Funktion $P : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto P(x)$. Dann folgt

$$P(0) = a_0\,,\ P'(0) = a_1\,,\ P''(0) = 2a_2\,,\ \ldots\ P^{(n)} = n!a_n\,,$$

also

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(0)}{k!}\, x^k\,.$$

Schreiben wir $P(x)$ in der Form

$$P(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)^2 + \cdots + b_n(x - x_0)^n\,,$$

so gilt analog

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k\,. \quad \text{(Taylorsche Formel)}$$

Für eine beliebige, genügend oft differenzierbare Funktion $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ und $x_0 \in (a, b)$ macht man nun den Ansatz

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + R_n(f; x_0, x)\,. \tag{4.5}$$

$R_n(f; x_0, x)$ heißt das **Restglied** bei der **Taylorentwicklung** von f an der Stelle x_0 . Unter der Voraussetzung, dass $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ mindestens $n + 1$ Mal differenzierbar ist, kann man zeigen, dass für jedes $x \in (a, b)$ ein $\theta \in (0, 1)$ existiert, so dass

$$R_n(f; x_0, x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \tag{4.6}$$

gilt. Von besonderem Interesse ist nun der Fall, dass $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ beliebig oft differenzierbar ist und

$$\lim_{n\to\infty} R_n(f; x_0, x) = 0$$

gilt. Dann folgt nämlich

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k\,. \quad \text{(Taylorreihe)} \tag{4.7}$$

Es zeigt sich nun, dass stets ein $r \geq 0$ existiert, so dass die Reihe auf der rechten Seite von (4.7) für $|x - x_0| < r$ konvergiert und für $|x - x_0| > r$ divergiert. Dabei kann auch $r = \infty$ sein. Für $|x - x_0| = r$ ist sowohl Konvergenz als auch Divergenz möglich.

Beispiel 4.25 *Es gelten folgende Taylorreihenentwicklungen:*

1. $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \cdots\,, \quad x \in \mathbb{R}$

2. $\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\, x^{2k+1} = x - \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{x^5}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \cdots\,, \quad x \in \mathbb{R}$

3. $\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}\, x^{2k} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} - \cdots\,, \quad x \in \mathbb{R}$

4. $\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots\,, \quad x \in (-1, 1]\,.$

   Speziell erhält man also

$$\ln 2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\,. \quad \text{(Leibniz – Reihe)}$$

5. $\alpha \in \mathbb{R}:$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k\,, \quad |x| < 1\,, \quad \text{(binomische Reihe)}$$

   wobei $\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}$. *Ist* α *eine natürliche Zahl, so erhält man die oben erwähnte Taylorsche Formel für das Polynom* $P(x) = (1+x)^\alpha$,

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\alpha} \binom{\alpha}{k} x^k\,.$$

   Im Fall $\alpha = -1$ *ergibt sich mit der Bezeichnung* $q := -x$ *die Formel für die Summe der geometrischen Reihe*

$$\frac{1}{1-q} = \sum_{k=0}^{\infty} q^k\,, \quad |q| < 1\,.$$

4.4.3 Die Leibnizsche Formel

Nach der Produktregel ist

$$(f\,g)' = f'g + f\,g'\,.$$

Es folgt

$$(f\,g)'' = (f'g + f\,g')' = f''g + 2\,f'g' + f\,g''\,.$$

Mittels vollständiger Induktion zeigt man, dass

$$(f\,g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k)} \quad \text{(Leibnizsche Formel)}$$

gilt.

Beispiel 4.26 *Wir wollen* $f(x) = \arctan x$ *im Punkt* $x_0 = 0$ *entwickeln. Dazu brauchen wir eine Formel für* $f^{(n)}(0)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ *Die Beziehung* $y = f(x)$, $-\infty < x < \infty$, *ist äquivalent zu* $x = g(y) := \tan y$, $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$. *Es folgt*

$$f'(x) = \frac{1}{g'(f(x))} = \frac{1}{1 + \tan^2(\arctan x)} = \frac{1}{1 + x^2}\,,$$

also

$$1 = f'(x)(1 + x^2)\,.$$

Auf beiden Seiten dieser Gleichung bilden wir unter Verwendung der Leibnizschen Formel die n*-te Ableitung,* $n = 1, 2, \ldots$:

$$0 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k+1)}(x) \frac{d^k(1 + x^2)}{dx^k} = f^{(n+1)}(x)(1 + x^2) + n f^{(n)}(x) \cdot 2\,x + n(n-1) f^{(n-1)}(x)\,.$$

Damit wird $f^{(n+1)}(0) = -n(n-1) f^{(n-1)}(0)$. *Aus* $f(0) = 0$ *folgt somit* $f^{(2n)}(0) = 0$ *für alle* $n = 0, 1, 2, \ldots$, *und* $f^{(2n+1)}(0) = -2n(2n-1) f^{(2n-1)}(0)$, *so dass mit* $f'(0) = 1$ *die Formel*

$$f^{(2n+1)}(0) = (-1)^n (2n)!$$

folgt. Untersucht man außerdem das Restglied in der Taylorentwicklung, so folgt schließlich

$$\arctan x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1}\,, \quad x \in (-1, 1]\,.$$

Für $x = 1$ *erhalten wir*

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

Praktisch berechnet man aber π *nicht mit dieser Formel, da die Reihe zu langsam konvergiert. Aus*

$$\frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y} = \tan(x + y)$$

folgt mit $t := \tan x$ *und* $s := \tan y$

$$\arctan \frac{t + s}{1 - t\,s} = \arctan t + \arctan s\,.$$

Für $t = \frac{120}{119}$ *und* $s = -\frac{1}{239}$ *ist* $\frac{t + s}{1 - ts} = 1$, *also*

$$\frac{\pi}{4} = \arctan \frac{120}{119} - \arctan \frac{1}{239} = \arctan \frac{\frac{5}{12} + \frac{5}{12}}{1 - \frac{5}{12}\frac{5}{12}} - \arctan \frac{1}{239} = 2 \arctan \frac{5}{12} - \arctan \frac{1}{239}\,.$$

Für die nun zu berechnenden Werte $\arctan x$ *lässt sich die Taylorreihe gut verwenden, da diese für kleine* $|x|$ *schnell konvergiert.*

4.4.4 Lokale und globale Extremwerte (Kurvendiskussion)

Ist $x_0 \in (a, b)$ ein lokales Extremum der Funktion $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, so folgt aus dem Satz von FERMAT (Satz 4.19), dass, falls f in x_0 differenzierbar ist, $f'(x_0) = 0$ gilt. **Extremwertverdächtige Punkte** der Funktion $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ sind somit

- Punkte $x \in (a, b)$ mit $f'(x) = 0$,
- die Randpunkte $x = a$ und $x = b$,
- Punkte $x \in (a, b)$, in denen f nicht differenzierbar ist.

Die globalen Extrema der Funktion f erhält man dann durch Vergleich der Werte $f(x)$ für alle extremwertverdächtigen Punkte $x \in [a, b]$.

Beispiel 4.27 *Für die Funktion* $f : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto |x| + \sin x$, *gilt*

$$f'(x) = \begin{cases} 1 + \cos x & , \quad x > 0\,, \\ -1 + \cos x & , \quad x < 0\,. \end{cases}$$

Die Menge der extremwertverdächtigen Punkte ist somit gleich

$$\left\{-\frac{\pi}{2}, 0, \pi, \frac{3\pi}{2}\right\}$$

mit

$$f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} - 1\,, \quad f(0) = 0\,, \quad f(\pi) = \pi\,, \quad f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \frac{3\pi}{2} - 1\,.$$

Somit sind $0 = f(0)$ *globales Minimum und* $\frac{3\pi}{2} - 1 = f\left(\frac{3\pi}{2}\right)$ *globales Maximum.*

Bemerkung 4.28 *Die Bedingung* $f'(x_0) = 0$ *ist lediglich eine notwendige Bedingung für das Vorliegen eines lokalen Extremums, aber nicht hinreichend, wie das Beispiel* $f(x) = x^3$ *für* $x_0 = 0$ *zeigt. Ist* f'' *in* x_0 *stetig, so zeigt die Beziehung (vgl. (4.5) und (4.6))*

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0 + \theta(x - x_0))(x - x_0)^2\,, \quad \theta \in (0, 1)\,,$$

dass $f'(x_0) = 0$ *und* $f''(x_0) \neq 0$ *eine hinreichende Bedingung für ein lokales Extremum ist, und zwar ist im Fall* $f''(x_0) < 0$ *der Punkt* x_0 *Stelle eines lokalen Maximums, im Fall* $f''(x_0) > 0$ *Stelle eines lokalen Minimums.*

Bemerkung 4.29 *Ist nun* $f^{(m+1)}$ *im Punkt* x_0 *stetig und*

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(m)}(x_0) = 0\,, \ f^{(m+1)}(x_0) \neq 0\,,$$

so gilt

$$f(x) = f(x_0) + \frac{1}{(m+1)!} f^{(m+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))(x - x_0)^{m+1}\,, \quad \theta \in (0, 1)\,.$$

Ist also m *ungerade, so liegt ein lokales Extremum im Punkt* x_0 *vor, für gerades* m *dagegen nicht. Einfachste Beispiele sind die Funktionen* $f(x) = x^{m+1}$.

Bemerkung 4.30 *Ist $f''(x) > 0$ (< 0) für $x \in (a,b)$, so bedeutet dies, dass $f' : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ streng monoton wachsend (fallend) ist. Nach Bemerkung 4.2 folgt hieraus die strenge Konvexität (Konkavität) von $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$. Punkte, in denen das Krümmungsverhalten wechselt, nennt man* **Wendepunkte**.

Beispiel 4.31 *Wir wollen uns eine möglichst genaue Vorstellung vom Graphen der Funktion*

$$f : \mathbb{R} \setminus \{1,\, 3\} \longrightarrow \mathbb{R}\,, \quad x \mapsto \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - 4x + 3} = \frac{(x+1)(x+2)}{(x-1)(x-3)}$$

erarbeiten (Kurvendiskussion). Wir berechnen dazu

$$f'(x) = \frac{-7x^2 + 2x + 17}{(x^2 - 4x + 3)^2}$$

und erhalten als Nullstellen der Ableitung (d.h. als Lösungen der Gleichung $f'(x) = 0$) die Zahlen

$$x_{1,2} = \frac{1}{7} \pm \frac{2}{7}\sqrt{30}\,,$$

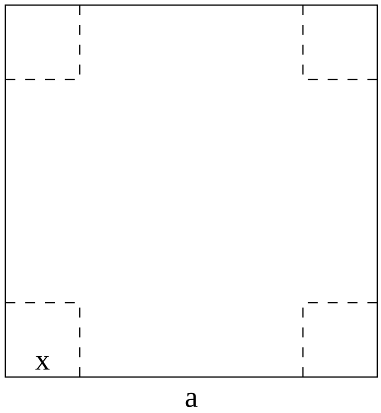
die also extremwertverdächtige Punkte sind. Aus $5 < \sqrt{30} < 6$ folgt

$$\frac{11}{7} < x_1 < \frac{13}{7} \quad \text{und} \quad -\frac{11}{7} < x_2 < -\frac{9}{7}\,.$$

Als weitere Hilfsmittel benutzen wir

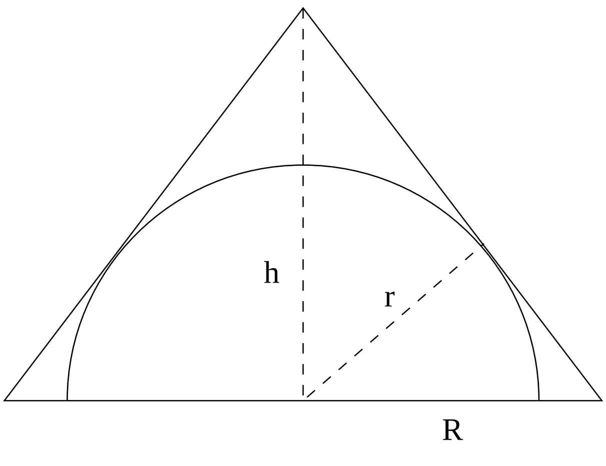
- *die Grenzwerte im Unendlichen*
$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 1\,,$$
- *das Verhalten an den Polstellen $x_{P1} = 1$ und $x_{P2} = 3$*
$$\lim_{x \to 1-0} f(x) = \lim_{x \to 3+0} f(x) = +\infty\,, \quad \lim_{x \to 1+0} f(x) = \lim_{x \to 3-0} f(x) = -\infty\,,$$
- *die Nullstellen, d.h. die Lösungen der Gleichung $f(x) = 0$,*
$$x_{N1} = -1\,, \quad x_{N2} = -2\,,$$
- *den Schnittpunkt $(0, f(0))$ des Graphen mit der y-Achse, also*
$$\left(0, \frac{2}{3}\right).$$
- *Gegebenenfalls kann man noch die Funktionswerte in den extremwertverdächtigen Punkten berechnen oder auch mittels der zweiten Ableitung das Krümmungsverhalten bestimmen.*

Beispiel 4.32 *Aus einem quadratischen Blech ist eine oben offene Schachtel mit größtmöglichem Volumen herzustellen:*



1. *$a > 0$ sei die Seitenlänge des quadratischen Bleches und $x > 0$ die Seitenlänge der an den vier Ecken auszuschneidenden Quadrate.*
2. *Das Volumen der Schachtel ist dann gleich $V(x) = (a-2x)^2 x$, $x \in \left[0, \frac{a}{2}\right]$.*
3. $V'(x) = (a-2x)^2 - 4(a-2x)x = (a-2x)(a-6x)$.
4. $V'(x) = 0$, $x \in \left(0, \frac{a}{2}\right) \iff x = x_0 = \frac{a}{6}$. $V(x_0) = \frac{4}{54}a^3$ *ist globales Maximum, da* $V(0) = V\left(\frac{a}{2}\right) = 0$ *gilt.*

Beispiel 4.33 *Um eine Halbkugel vom Radius $r > 0$ ist ein gerader Kreiskegel kleinsten Volumens zu beschreiben:*



1. *$R > 0$ sei der Radius der Grundfläche des gesuchten Kreiskegels, $h > 0$ seine Höhe und $\varphi > 0$ der Winkel (in der Spitze des Kreiskegels) zwischen Höhe und Seitenlinie.*
2. *Dann gilt $R = \frac{r}{\cos\varphi}$, $h = \frac{r}{\sin\varphi}$, und das Volumen des Kreiskegels ist gleich*

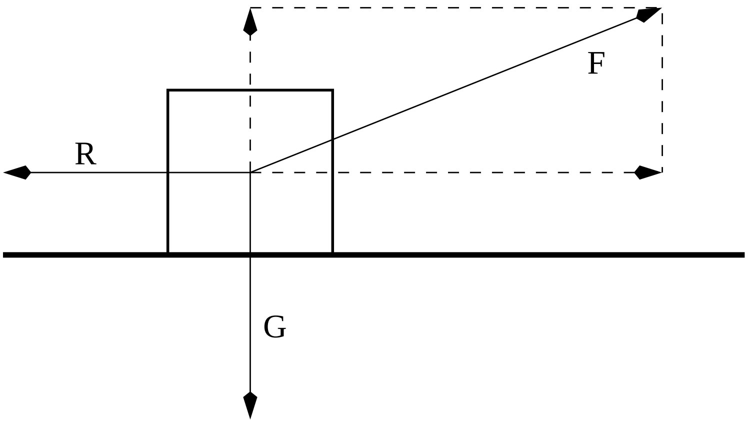
$$\frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{1}{3}\pi \frac{r^3}{\cos^2\varphi \sin\varphi} =: V(\varphi), \quad \varphi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

Es ist also die Funktion $f : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow \mathbb{R}\,,\ \varphi \mapsto \cos^2\varphi\,\sin\varphi$ *zu maximieren.*

3. $f'(\varphi) = -2\cos\varphi\sin^2\varphi + \cos^3\varphi = 2\cos^3\varphi\left(\frac{1}{2} - \tan^2\varphi\right)$, *d.h.* $\varphi_0 = \arctan\frac{1}{\sqrt{2}}$ *ist extremwertverdächtiger Punkt.*

4. *Wegen* $f(0) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ *und* $f(\varphi_0) > 0$ *ist* $f(\varphi_0)$ *wirklich globales Maximum von* $f : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow \mathbb{R}$.

Beispiel 4.34 *Eine Last vom Gewicht* G , *die auf einer horizontalen Ebene liegt, soll durch Einwirkung einer Kraft verschoben werden. Unter welchem Winkel* $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ *zur Horizontalen muss diese Kraft angreifen, wenn sie möglichst klein sein soll? Gegeben sei dabei der Reibungskoeffizient* μ .



1. F *sei der Betrag der angreifenden Kraft. In Richtung der Horizontalen wirkt dann die Kraft* $F\cos\theta$, *welche die Reibungskraft* $R = \mu(G - F\sin\theta)$ *zu überwinden hat. Um die Last fortzubewegen, ist also die Bedingung*

$$F\cos\theta > \mu(G - F\sin\theta)\,, \quad \textit{d.h.} \quad F > \frac{\mu G}{\cos\theta + \mu\sin\theta}$$

   zu erfüllen.

2. *Dies bedeutet, dass die Funktion* $f : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}\,,\ \theta \mapsto \cos\theta + \mu\sin\theta$ *zu maximieren ist.*

3. *Aus der Gleichung* $f'(\theta) = \mu\cos\theta - \sin\theta = 0$ *erhalten wir den Winkel* $\theta_0 = \arctan\mu$, *der wegen* $f''(\theta_0) = -(\mu\sin\theta_0 + \cos\theta_0) < 0$ *auch wirklich das Maximum liefert.*

4. *Für einen Stein, der auf einem Holzbrett zu bewegen ist, gilt* $\mu \approx 0.4$ *und somit* $\theta_0 \approx 22^o$.

4.4.5 Die Lösung nichtlinearer Gleichungen

Die Methode der sukzessiven Approximation

Für eine gegebene Funktion $g : [a,b] \longrightarrow [a,b]$ suchen wir Lösungen der Gleichung

$$x = g(x)\,, \tag{4.8}$$

sog. **Fixpunkte** der Funktion g. Wir verwenden die **Methode der sukzessiven Approximation**

$$x_{n+1} = g(x_n)\,, \quad n = 0, 1, 2, \ldots\,, \tag{4.9}$$

mit einem Startwert $x_0 \in [a,b]$ und setzen voraus, dass die Funktion g **kontrahierend** ist, d.h. es existiert eine Zahl $q \in (0,1)$ mit der Eigenschaft

$$|g(x) - g(y)| \le q|x - y| \quad \forall\, x, y \in [a,b]\,. \tag{4.10}$$

Wir wollen nun zeigen, dass unter der Voraussetzung (4.10), aus der auch sofort die Stetigkeit der Funktion g folgt, die durch (4.9) definierte Zahlenfolge $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ gegen eine Lösung der Gleichung (4.8) konvergiert. Wir zeigen zuerst, dass $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ eine Cauchyfolge ist (vgl. Abschnitt 2.1, (9)). Dazu seien n und m beliebige natürliche Zahlen. Aus (4.9) und (4.10) folgt

$$|x_{n+1} - x_n| = |g(x_n) - g(x_{n-1})| \le q|x_n - x_{n-1}| \le q^2|x_{n-1} - x_{n-2}| \le \cdots \le q^n|x_1 - x_0|$$

und somit

$$\begin{aligned} |x_{n+m} - x_n| &\le |x_{n+m} - x_{n+m-1}| + |x_{n+m-1} - x_{n+m-2}| + \cdots + |x_{n+1} - x_n| \\ &\le \left(q^{n+m-1} + q^{n+m-2} + \cdots + q^n\right)|x_1 - x_0| \\ &= q^n \frac{1 - q^m}{1 - q}\,|x_1 - x_0| \le \frac{q^n}{1-q}\,|x_1 - x_0|\,. \end{aligned} \tag{4.11}$$

Für beliebiges $\varepsilon > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\dfrac{q^n}{1-q}\,|x_1 - x_0| < \varepsilon$ und somit $|x_{n+m} - x_n| < \varepsilon$ für alle $n \ge N$ und alle $m \in \mathbb{N}$, d.h. $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ ist Cauchyfolge. Damit existiert $x^* = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Aus (4.9) und der bereits erwähnten Stetigkeit der Funktion g folgt für $n \longrightarrow \infty$ die Beziehung $x^* = g(x^*)$, d.h. x^* ist Lösung der Gleichung (4.8). Dabei gilt wegen (4.11) (man betrachte $m \longrightarrow \infty$) die a-priori Abschätzung

$$|x^* - x_n| \le \frac{q^n}{1-q}\,|x_1 - x_0|\,. \tag{4.12}$$

Aus (4.10) folgt auch, dass diese Lösung x^* eindeutig ist. Denn aus $x^* = g(x^*)$ und $y^* = g(y^*)$ folgt $|x^* - y^*| \le q|x^* - y^*|$, also $x^* = y^*$. Wir erhalten somit den folgenden, nach Banach benannten Fixpunktsatz.

Satz 4.35 *Ist $g : [a,b] \longrightarrow [a,b]$ eine kontrahierende Abbildung, so besitzt die Gleichung (4.8) genau eine Lösung $x^* \in [a,b]$, die für beliebiges $x_0 \in [a,b]$ durch die Folge $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ aus (4.9) approximiert werden kann, wobei (4.12) gilt.*

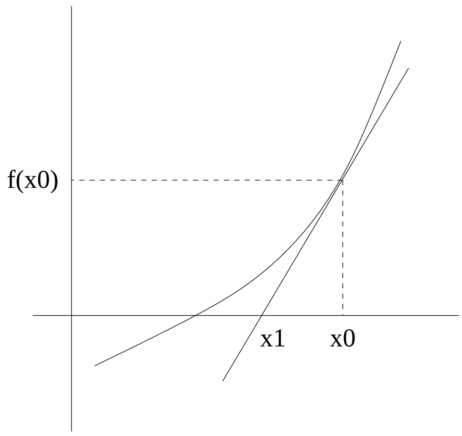
Bemerkung 4.36 *Ist die stetige Funktion $g : [a,b] \longrightarrow [a,b]$ auf (a,b) differenzierbar mit $|g'(x)| \le q < 1$, $x \in (a,b)$, so genügt sie der Kontraktionsbedingung (4.10). Das folgt aus dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung (Satz 4.21).*

Das Newtonsche Iterationsverfahren

Für eine gegebene Funktion $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ suchen wir Lösungen der Gleichung

$$f(x) = 0\,, \tag{4.13}$$

d.h. **Nullstellen** der Funktion f. Wir setzen voraus, dass f hinreichend oft differenzierbar ist und verwenden folgende geometrische Überlegung. Es sei $x_0 \in (a,b)$ eine gewisse Näherung für eine Lösung von (4.13).



Die Tangente an den Graphen der Funktion f im Punkt $(x_0, f(x_0))$ hat die Gleichung $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$. Diese Tangente schneidet die x-Achse im Punkt $x_1 = x_0 - \dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}$, den wir als neue Näherung für eine Lösung von (4.13) ansehen. Durch wiederholte Anwendung dieser Überlegungen erhalten wir die Iterationsvorschrift

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\,, \quad n = 0, 1, 2, \ldots\,, \tag{4.14}$$

die der Methode der sukzessiven Approximation (4.9) für die Funktion

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

entspricht.

1. Wir setzen voraus, dass $f'(x) \neq 0$ für $x \in (a,b)$ erfüllt ist. Es gilt dann

   $$g'(x) = 1 - \frac{[f'(x)]^2 - f''(x)f(x)}{[f'(x)]^2} = \frac{f''(x)f(x)}{[f'(x)]^2}\,,$$

   woraus man schliessen kann, dass für eine hinreichend kleine Umgebung einer Nullstelle von f, sagen wir $U = [x_0 - r, x_0 + r] \subset (a,b)$ mit einem $r > 0$, die Ungleichung

   $$|g'(x)| \leq q < 1\,, \quad x \in U\,, \tag{4.15}$$

gilt. Um Bemerkung 4.36 auf die Funktion $g : U \longrightarrow \mathbb{R}$ anwenden zu können, muss auch $g(x) \in U$ für alle $x \in U$ gelten. Aus dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung und der Definition von $g(x)$ folgt aber nun für $x \in U$

$$|g(x) - x_0| \le |g(x) - g(x_0)| + |g(x_0) - x_0| \le q|x - x_0| + \left|\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}\right| .$$

Setzen wir also voraus, dass

$$\left|\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}\right| \le (1-q)r \tag{4.16}$$

gilt, so erhalten wir aus Bemerkung 4.36, dass das Newtonverfahren (4.14) für eine Anfangsnäherung $x_0 \in (a,b)$, die (4.15) und (4.16) erfüllt, gegen eine Lösung $x^* \in U$ der Gleichung (4.13) konvergiert. Die Bedingung (4.16) besagt dabei, dass die Startnäherung x_0 hinreichend gut sein muss, und zwar um so besser, je größer die Zahl q in (4.15) ist. Man sagt deshalb, dass das Newtonverfahren i.a. lediglich **lokal konvergent** ist.

2. Wir nehmen an, dass zusätzlich eine Zahl $c_0 > 0$ mit der Eigenschaft $|g''(x)| \le 2c_0 \ \forall\, x \in U$ existiert. Dann folgt wegen

$$\begin{aligned} x_{n+1} = g(x_n) &= g(x^*) + g'(x^*)(x_n - x^*) + \frac{1}{2}g''(x^* + \theta(x_n - x^*))(x_n - x^*)^2 \\ &= x^* + \frac{1}{2}g''(x^* + \theta(x_n - x^*))(x_n - x^*)^2 , \quad \theta \in (0,1) , \end{aligned}$$

die Abschätzung

$$|x_{n+1} - x^*| \le c_0 |x_n - x^*|^2 ,$$

weshalb man das Newtonverfahren in diesem Fall **quadratisch konvergent** nennt.

3. Wir beschreiben hier eine Situation, in der das Newtonverfahren auch global konvergent ist. Die stetige Funktion $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ habe die Eigenschaften

   (a) $f'(x) > 0 \ \forall\, x \in [a,b]$,

   (b) $f(a)f(b) < 0$,

   (c) $f''(x) > 0 \ \forall\, x \in (a,b)$ (Konvexität).

   Dann existiert offenbar genau ein $x^* \in (a,b)$ mit $f(x^*) = 0$. Wir setzen $x_0 = b$. Es folgt

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} < x_0$$

und

$$\begin{aligned} x_1 - x^* &= x_0 - x^* - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \\ &= -\frac{1}{f'(x_0)} \left[f(x_0) + f'(x_0)(x^* - x_0) \right] \\ &= -\frac{1}{f'(x_0)} \left[f(x^*) - f''(x_0 + \theta(x^* - x_0))(x^* - x_0)^2 \right] \\ &= \frac{1}{2f'(x_0)} f''(x_0 + \theta(x^* - x_0))(x^* - x_0)^2 > 0 \,, \end{aligned}$$

d.h. $x^* < x_1 < x_0$ und $f(x_1) > 0$. Induktiv schließt man also auf $x^* < x_{n+1} < x_n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ Somit folgt die Existenz des Grenzwertes

$$\overline{x} = \lim_{n \to \infty} x_n \,,$$

wobei aus (4.14) für $n \longrightarrow \infty$ die Beziehung

$$\overline{x} = \overline{x} - \frac{f(\overline{x})}{f'(\overline{x})} \,,$$

d.h. $f(\overline{x}) = 0$, und somit $\overline{x} = x^*$ folgt.

Beispiel 4.37 *Wir suchen die Nullstellen der Funktion* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{x}{2} - \sin x$, *d.h. die Lösungen der Gleichung*

$$\frac{x}{2} - \sin x = 0 \quad \textit{bzw.} \quad x = 2 \sin x =: g(x) \,.$$

Aus $f'(x) = \frac{1}{2} - \cos x$ *ergibt sich das Newtonverfahren*

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - 2 \sin x_n}{1 - 2 \cos x_n} = 2 \, \frac{\sin x_n - x_n \cos x_n}{1 - 2 \cos x_n} \,. \tag{4.17}$$

In den folgenden Tabellen vergleichen wir die Ergebnisse des Newtonverfahrens (4.17) mit denen der sukzessiven Approximation

$$x_{n+1} = 2 \sin x_n \,. \tag{4.18}$$

	Sukz. Appr. (4.18)	Newtonverfahren (4.17)
x_0	3.0000000000000000	3.0000000000000000
x_1	0.2822400161197344	2.0879954127013778
x_2	0.5570154662136501	**1.**9122292580258147
x_3	**1.**0573103488340820	**1.895**6526275469130
x_4	**1.**7420748663201644	**1.8954942**815405740
x_5	**1.**9707353101974190	**1.89549426703398**12
x_6	**1.8**421695065410935	**1.8954942670339809**

	Sukz. Appr. (4.18)	Newtonverfahren (4.17)
x_0	0.5000000000000000	**0.**5000000000000000
x_1	0.9588510772084060	-**0.**1076168810751763
x_2	**1.**6370641951729958	**0.000**8396553633925
x_3	**1.**9956101764404637	-**0.0000000003**946501
x_4	**1.8**222309416572313	**0.0000000000000000**

Man sieht die bedeutend schnellere Konvergenz des Newtonverfahrens, welches für verschiedene Startwerte auch verschiedene Lösungen approximieren kann. Die Methode der sukzessiven Approximation kann für $x_0 \neq 0$ die Lösung $x = 0$ nicht approximieren, was auf die Ungleichung $|g'(0)| = 2 > 1$ zurückzuführen ist (vgl. Bem. 4.36).

Beispiel 4.38 *Wir wollen die m-te Wurzel ($m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$) aus einer positiven Zahl A ziehen. Die Funktion $f(x) = x^m - a$ ist auf $[0, \infty)$ konvex, und es gilt $f'(x) > 0$ für $x > 0$. Wir haben also auf jedem Intervall $[a, b]$ mit $0 < a < A^{\frac{1}{m}} < b$ eine Situation vorliegen, wie sie oben unter 3. betrachtet wurde. Mit $f'(x) = mx^{m-1}$ liefert das Newtonverfahren die Iterationsvorschrift*

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^m - A}{m\, x_n^{m-1}} = \left(1 - \frac{1}{m}\right) x_n + \frac{A}{m\, x_n^{m-1}}\,,$$

im Spezialfall $m = 2$ also

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{A}{x_n}\right).$$

Das Hornerschema

Zur Durchführung des Newtonverfahrens hat man im n-ten Schritt sowohl den Funktionswert $f(x_n)$ als auch den Wert der ersten Ableitung $f'(x_n)$ zu berechnen. In dem Fall, dass $f(x)$ ein Polynom ist, d.h.

$$f(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k x^k = a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0\,,$$

läßt sich das sehr effektiv realisieren. Zur Berechnung von $f(x_0)$ geht man wie folgt vor. Es ist

$$f(x) - f(x_0) = (x - x_0) f_1(x) =: (x - x_0)(b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0)$$

mit

$$a_m = b_{m-1}\,,\ a_{m-1} = b_{m-2} - b_{m-1}x_0\,,\ \ldots\ a_1 = b_0 - b_1 x_0\,,\ a_0 = f(x_0) - b_0 x_0$$

bzw.

$$b_{m-1} = a_m\,,\ b_{m-2} = a_{m-1} + b_{m-1}x_0\,,\ \ldots\ b_0 = a_1 + b_1 x_0\,,\ f(x_0) = a_0 + b_0 x_0\,.$$

Wir erhalten das (kleine) **Hornerschema**

1. $b_{m-1} := a_m$,

2. for $k := m-1$ to 0 step -1 do $b_{k-1} := a_k + b_k * x_0$,

3. $f(x_0) := b_{-1}$,

welches tabellarisch auch in der Form

$$\begin{array}{cccccc}
a_m & a_{m-1} & a_{m-2} & \cdots & a_1 & a_0 \\
 & + & + & & + & + \\
 & x_0 b_{m-1} & x_0 b_{m-2} & \cdots & x_0 b_1 & x_0 b_0 \\
= & = & = & & = & = \\
b_{m-1} & b_{m-2} & b_{m-3} & \cdots & b_0 & f(x_0)
\end{array}$$

geschrieben werden kann. Aus der Beziehung $f(x) - f(x_0) = (x - x_0)f_1(x)$ folgt nun $f'(x) = f_1(x) + (x - x_0)f_1'(x)$, d.h.

$$f'(x_0) = f_1(x_0) .$$

Zur Berechnung von $f'(x_0)$ hat man also nur das Hornerschema auf das Polynom $f_1(x)$ anzuwenden.

4.4.6 Einige Begriffsbildungen bei ökonomischen Betrachtungen

Ist $K(x)$ eine **Kostenfunktion**, die der produzierten Stückzahl x die Kosten $K(x)$ zuordnet, so nennt man ihre erste Ableitung $K'(x)$ **Grenzkostenfunktion** oder **marginale Kostenquote**. Die Größe $K'(x)\Delta x$ gibt dann die ungefähre Änderung der Kosten an, wenn sich die produzierte Stückzahl von x auf $x + \Delta x$ ändert. Völlig analog nennt man die erste Ableitung einer **Umsatzfunktion**, **Gewinnfunktion** bzw. **Steuerfunktion** entsprechend **Grenzumsatz**, **Grenzgewinn** bzw. **Grenzsteuer**.

Einer ökonomischen Funktion $f(x)$ ordnet man oft auch die entsprechende **Durchschnittsfunktion**

$$\overline{f}(x) = \frac{f(x)}{x}, \quad x > 0 ,$$

zu. Im Falle einer Kostenfunktion $K(x)$ gibt die Durchschnittsfunktion $k(x) = \dfrac{K(x)}{x}$ die Stückkosten an. Wegen $f(1) = \overline{f}(1)$ schneiden sich die Graphen der Funktion f und ihrer Durchschnittsfunktion stets im Punkt $(1, f(1))$.

In lokalen Extrempunkten der Stückkostenfunktion $k(x)$ findet ein Übergang von wachsenden Stückkosten zu fallenden Stückkosten bzw. umgekehrt statt. Lösen wir die Gleichung $k'(x) = 0$, d.h.

$$\frac{K'(x)x - K(x)}{x^2} = 0 ,$$

so sehen wir, dass lokale Extrema nur in solchen Punkten x vorliegen können, in denen die Grenzkosten $K'(x)$ gleich den Stückkosten $k(x)$ sind.

Unter der **Elastizität** einer ökonomischen Funktion $f(x)$ versteht man das Verhältnis der relativen Änderung der abhängigen Größe $f(x)$ zur relativen Änderung der unabhängigen Größe x, d.h.

$$\frac{\Delta f(x)}{f(x)} : \frac{\Delta x}{x}$$

bzw., für $\Delta x \longrightarrow 0$, die Größe

$$\varepsilon_{f,x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} \frac{x}{f(x)} = f'(x) \frac{x}{f(x)} = \frac{f'(x)}{\overline{f}(x)} .$$

Die Elastizität ist ein Maß für die Anpassungsfähigkeit einer ökonomischen Größe an veränderte Bedingungen. Man nennt nun die ökonomische Funktion $f(x)$ im Punkt x

- **elastisch**, wenn $|\varepsilon_{f,x}| > 1$,
- **proportionalelastisch**, wenn $|\varepsilon_{f,x}| = 1$,
- **unelastisch**, wenn $|\varepsilon_{f,x}| < 1$

gilt.

Ist z.B. $f(x)$ eine **Preis-Absatz-Funktion**, die also dem Preis x die nachgefragte Menge $f(x)$ zuordnet, so nennt man $\varepsilon_{f,x}$ die **direkte Preiselastizität**.

Aus $\overline{f}'(x) = \dfrac{f'(x)x - f(x)}{x^2}$ folgt

$$\varepsilon_{\overline{f},x} = \frac{f'(x)x - f(x)}{x^2} \frac{x}{\overline{f}(x)} = \frac{f'(x)}{\overline{f}(x)} - 1 = \varepsilon_{f,x} - 1$$

und somit

$$f'(x) = \overline{f}(x)\left(1 + \varepsilon_{\overline{f},x}\right) . \quad \text{(allg. Amoroso-Robinson-Gleichung)}$$

4.5 Übungsaufgaben

1. Man untersuche die folgenden Funktionen auf ihrem "natürlichen" Definitionsbereich auf Konvexität bzw. Konkavität, Monotonie, Beschränktheit und bestimme Supremum und Infimum bzw. Maximum und Minimum des Wertebereichs dieser Funktionen.

   (a) x^2 (b) $\sin x$ (c) $\dfrac{1}{x}$ (d) $\tan x$ (e) e^x

2. Es ist die Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x^5 - x + 1$ gegeben.

   (a) Man beweise, dass f im Intervall $[-2, -1]$ eine Nullstelle hat.

   (b) Man zeige, dass f im Intervall $(-2, 2)$ ein Minimum und ein Maximum hat.

   (c) Man beweise, dass f in den Intervallen $[-1, 0]$ und $[0, 1]$ jeweils (mindestens) einen stationären Punkt hat.

3. Wir betrachten die Funktion $f(x) = x^2$.
   (a) Man berechne den Anstieg m_1 der Sekante zum Graphen dieser Funktion durch die Punkte $A = (1, f(1))$ und $B_1 = (2, f(2))$.
   (b) Man berechne die Folge der Anstiege m_k der Sekanten durch die Punkte A und $B_k = \left(1 + k^{-1}, f\left(1 + k^{-1}\right)\right)$.
   (c) Man berechne den Anstieg der Tangente im Punkt A als Grenzwert der Anstiege m_k.

4. Man bilde die ersten Ableitungen (nach dem angegebenen Argument) der folgenden Funktionen unter Beachtung ihres Definitionsbereiches:

   (a) $f(x) = 7x^{10} + 3x^5 - 4x$ (b) $f(z) = z^{-3} + z^{2/3}$ (c) $f(t) = \dfrac{3}{t^2}$

   (d) $f(x) = e^{2x^2+3x-5}$ (e) $f(t) = \sin\left(x\, e^{x^2}\right) + t\cos x$ (f) $g(x) = \dfrac{\sin x}{x}$

   (g) $g(z) = (x^2 + z^2)e^z$ (h) $g(t) = \ln t$ (i) $g(t) = \sqrt{1 - x^2}$ (j) $f(x) = \tan x := \dfrac{\sin x}{\cos x}$