Handzettel Vektoranalysis

Flächen- und Volumenintegrale

- Variablensubstitution: $\displaystyle\int_B f(x)\,dx = \int_{\widetilde{B}} f(g(u))|J(u)|\,du$, wobei $J(u) = \det g'(u)$.
- Polarkoordinaten: $u = (r,\varphi)$, $r \geq 0$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$,

$$x_1 = r\cos\varphi,\ x_2 = r\sin\varphi,\ J(r,\varphi) = r\,.$$

- Kugelkoordinaten: $u = (r,\varphi,\vartheta)$, $r \geq 0$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $-\dfrac{\pi}{2} \leq \vartheta \leq \dfrac{\pi}{2}$,

$$x_1 = r\cos\varphi\cos\vartheta,\ x_2 = r\sin\varphi\cos\vartheta,\ x_3 = r\sin\vartheta,\ J(r,\varphi,\vartheta) = r^2\cos\vartheta\,.$$

- Zylinderkoordinaten: $u = (r,\varphi,z)$, $r \geq 0$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $z \in \mathbb{R}$,

$$x_1 = r\cos\varphi,\ x_2 = r\sin\varphi,\ x_3 = z,\ J(r,\varphi,z) = r\,.$$

Wegintegrale

	1. Art	**2. Art**
gegeben	$\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $\Gamma = \Gamma_\gamma = \{\gamma(t) : t \in [a,b]\}$, $s : [a,b] \longrightarrow [0,L]$, $L = L(\gamma)$	
gegeben	$\varphi : \Gamma \longrightarrow \mathbb{R}$	$v = (v_1,\ldots,v_m) : \Gamma \longrightarrow \mathbb{R}^m$
Definition	$\displaystyle\int_\gamma \varphi(x)\,ds = \int_a^b \varphi(\gamma(t))\,ds(t)$	$\displaystyle\int_\gamma v(x)\,dx = \int_a^b v(\gamma(t))\,d\gamma(t)$
Berechnung	$\displaystyle\int_a^b \varphi(\gamma(t))\lvert\dot\gamma(t)\rvert\,dt$	$\displaystyle\int_a^b \langle v(\gamma(t)),\dot\gamma(t)\rangle\,dt = \sum_{j=1}^m \int_a^b v_j(\gamma(t))\dot\gamma_j(t)\,dt$
Notationen	$\displaystyle\int_\gamma \varphi\,ds$, $\displaystyle\int_\gamma \varphi(x)\,\lvert dx\rvert$	$\displaystyle\int_\gamma v_1(x)\,dx_1 + \ldots + v_m(x)\,dx_m$
$m = 2$	$\displaystyle\int_\gamma \varphi(x,y)\,ds$	$\displaystyle\int_\gamma f(x,y)\,dx + g(x,y)\,dy$
$m = 3$	$\displaystyle\int_\gamma \varphi(x,y,z)\,ds$	$\displaystyle\int_\gamma f(x,y,z)\,dx + g(x,y,z)\,dy + h(x,y,z)\,dz$

- Berechnungsregel:

  Ersetze x durch $\gamma(t)$ und beachte

  $ds(t) = s'(t)\,dt = |\dot\gamma(t)|\,dt = \sqrt{[\dot\gamma_1(t)]^2 + \ldots + [\dot\gamma_m(t)]^2}\,dt$ bzw. $d\gamma(t) = \dot\gamma(t)\,dt$!

- Oder ($m = 2$, $m = 3$):

  Ersetze x, y und z entsprechend durch $\gamma_1(t)$, $\gamma_2(t)$ und $\gamma_3(t)$

  sowie dx, dy und dz durch $\dot\gamma_1(t)\,dt$, $\dot\gamma_2(t)\,dt$ und $\dot\gamma_3(t)\,dt$!

- Im Fall $m = 2$ oder $m = 3$ schreibt man oft für $\gamma_1(t)$, $\gamma_2(t)$ und $\gamma_3(t)$ einfach $x(t)$, $y(t)$ und $z(t)$.

- Man nennt $\varphi : \Gamma \longrightarrow \mathbb{R}$ ein **Skalarfeld** und (für $m > 1$) $v : \Gamma \longrightarrow \mathbb{R}^m$ ein **Vektorfeld**.

Bemerkungen und Hinweise:

- Im Fall einer Jordankurve $\Gamma = \Gamma_\gamma$ mit einem Jordanweg γ kann man auch von einem Kurvenintegral sprechen und $\int_\Gamma$ statt $\int_\gamma$ schreiben, weil diese Integrale dann vom gewählten Jordanweg unabhängig sind: Sind nämlich $\Gamma = \Gamma_{\gamma^1} = \Gamma_{\gamma^2}$, $\gamma^2 = \gamma^1 \circ \chi$ und $\chi : [a_2, b_2] \longrightarrow [a_1, b_1]$ eine stetige Bijektion mit $\chi(a_2) = a_1$, so folgt (mit $s = s^j(t)$, $t \in [a_j, b_j]$)

$$\begin{aligned}\int_{\gamma^1} \varphi(x)\,ds &= \int_{a_1}^{b_1} \varphi(\gamma^1(t))\,ds^1(t) = \int_{a_2}^{b_2} \varphi(\gamma^1(\chi(\tau)))\,ds^1(\chi(\tau)) \\ &= \int_{a_2}^{b_2} \varphi(\gamma^2(\tau))\,ds^2(\tau) = \int_{\gamma^2} \varphi(x)\,ds\end{aligned}$$

  bzw.

$$\begin{aligned}\int_{\gamma^1} f(x)\,dx &= \int_{a_1}^{b_1} v(\gamma^1(t))\,d\gamma^1(t) = \int_{a_2}^{b_2} v(\gamma^1(\chi(\tau)))\,d\gamma^1(\chi(\tau)) \\ &= \int_{a_2}^{b_2} v(\gamma^2(\tau))\,d\gamma^2(\tau) = \int_{\gamma^2} v(x)\,dx\,.\end{aligned}$$

  Sind die eingehenden Funktionen sämtlich differenzierbar, so schreibt sich dies unter Verwendung der Kettenregel z.B. im Fall des Wegintegrals zweiter Art auch wie folgt:

$$\begin{aligned}\int_{a_1}^{b_1} \left\langle v(\gamma^1(t)), \dot\gamma^1(t)\right\rangle\,dt &= \int_{a_2}^{b_2} \left\langle v(\gamma^1(\chi(\tau)), \dot\gamma^1(\chi(\tau))\right\rangle \dot\chi(\tau)\,d\tau \\ &= \int_{a_2}^{b_2} \left\langle v(\gamma^1(\chi(\tau))), \dot\gamma^1(\chi(\tau))\dot\chi(\tau)\right\rangle\,d\tau = \int_{a_2}^{b_2} \left\langle v(\gamma^2(\tau)), \dot\gamma^2(\tau)\right\rangle\,d\tau\,.\end{aligned}$$

- **Beachte**: Bei einem Kurvenintegral zweiter Art $\displaystyle\int_\Gamma v(x)\,dx$ ist anzugeben, wie die Kurve orientiert ist. Die vorangegangenen Überlegungen zeigen nämlich, dass bei Verwendung einer Bijektion $\chi : [a_2, b_2] \longrightarrow [a_1, b_1]$ mit $\chi(a_2) = b_1$ das Wegintegral zweiter Art beim Übergang von γ^1 zu γ^2 mit -1 multipliziert wird. Dagegen ist das Kurvenintegral erster Art von der Orientierung der Kurve unabhängig.

- Anwendungen des Wegintegrals erster Art:
  - Länge eines Weges: $\displaystyle\int_\gamma ds = \int_a^b |\dot\gamma(t)|\,dt$
  - Gesamtmasse bzw. -ladung einer mit Masse bzw. Ladung belegten Kurve: $\displaystyle\int_\gamma \rho(x)\,ds$, ρ – Dichte der Masse- bzw. Ladungsbelegung
  - Schwerpunkt x^* einer mit Masse belegten Kurve:

$$x_1^* = \frac{1}{m}\int_\gamma x_1\rho(x)\,ds\,,\ x_2^* = \frac{1}{m}\int_\gamma x_2\rho(x)\,ds\,,\quad m = \int_\gamma \rho(x)\,dx$$

- Anwendungen des Wegintegrals zweiter Art:
  - Arbeit eines Kraftfeldes $F : \Gamma_\gamma \longrightarrow \mathbb{R}^3$ entlang eines Weges, z.B. $\displaystyle\int_\gamma F_1(x,y,z)\,dx + F_2(x,y,z)\,dy + F_3(x,y,z)\,dz$
  - Zirkulation eines Geschwindigkeitsfeldes $v : \Gamma \longrightarrow \mathbb{R}^3$ entlang der Kurve Γ, z.B. $\displaystyle\int_\Gamma v_x(x,y,z)\,dx + v_y(x,y,z)\,dy + v_z(x,y,z)\,dz$
- Wegunabhängigkeit:
  - Ein stetiges Vektorfeld $v : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^m$ ist genau dann ein Vektorfeld mit im Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ wegunabhängigem Integral $\displaystyle\int_\gamma v(x)\,dx$, wenn es ein Gradientenfeld ist.
  - Ein stetig differenzierbares Vektorfeld $v : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^m$ auf einem einfach zusammenhängenden Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ ist genau dann ein Gradientenfeld, wenn die Integrabilitätsbedingung

$$\frac{\partial v_j(x)}{\partial x_k} = \frac{\partial v_k(x)}{\partial x_j}\,,\quad \forall\, x \in \Omega\,,\ \forall\, j,k = 1,\ldots,m\,,$$

    erfüllt ist.
  - Ist $\varphi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ ein Potential zu $v : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^m$, so gilt für einen entsprechenden Weg $\gamma : [a,b] \longrightarrow \Omega$ die Formel

$$\int_\gamma v(x)\,dx = \varphi(\gamma(b)) - \varphi(\gamma(a))\,.$$

Oberflächenintegrale

	1. Art	2. Art
gegeben	$f : K \longrightarrow \mathbb{R}^3\,,\ F = f(K)$	
gegeben	$\varphi : F \longrightarrow \mathbb{R}$	$v = (v_1, v_2, v_3) : F \longrightarrow \mathbb{R}^3$
Definition	$\displaystyle\iint_F \varphi\, dF$	$\displaystyle\iint_F \overrightarrow{v}\, d\overrightarrow{F} = \iint_F (\overrightarrow{v}, \overrightarrow{n_e})\, dF$ $\overrightarrow{n_e}$ - normierte Flächennormale
Berechnung	$\displaystyle\iint_K \varphi(f(u))\, \lvert\overrightarrow{n}(u)\rvert\, du$	$\displaystyle\iint_K (\overrightarrow{v}(f(u)), \overrightarrow{n}(u))\, du = \iint_K \langle v(f(u)), n(u)\rangle\, du$
	$\displaystyle\overrightarrow{n}(u) = \frac{\partial \overrightarrow{f}(u)}{\partial u_1} \times \frac{\partial \overrightarrow{f}(u)}{\partial u_2}\,, \quad \overrightarrow{n_e} = \frac{\overrightarrow{n}}{\lvert\overrightarrow{n}\rvert}$	

- Zur Berechnung der Oberflächenintegrale hat man also nur die folgenden Formeln zu beachten:
$$dF = \lvert\overrightarrow{n}(u)\rvert\, du \quad \text{und} \quad d\overrightarrow{F} = \overrightarrow{n}(u)\, du$$
- Anwendungen des Oberflächenintegrals erster Art:
  - Flächeninhalt: $\displaystyle\iint_F dF$
  - Gesamtmasse einer mit Masse belegten Fläche:
    $m = \displaystyle\iint_F \rho\, dF$, ρ - Dichte der Massebelegung
  - Schwerpunkt x^* einer mit Masse belegten Fläche:
$$x_j^* = \frac{1}{m} \iint_F x_j \rho\, dF\,,\ j = 1, 2, 3$$
- Anwendung des Oberflächenintegrals zweiter Art:
  Fluss eines Geschwindigkeitsfeldes $\overrightarrow{v}$ durch die Fläche F: $\displaystyle\iint_F \overrightarrow{v}\, d\overrightarrow{F}$
- Kugelfläche vom Radius $r > 0$: $\overrightarrow{f}(\varphi, \vartheta) = r\,(\cos\varphi\cos\vartheta, \sin\varphi\cos\vartheta, \sin\vartheta)$, $0 \le \varphi \le 2\pi$, $-\dfrac{\pi}{2} \le \vartheta \le \dfrac{\pi}{2}$,
$$\overrightarrow{n}(\varphi, \vartheta) = r\cos\vartheta\, \overrightarrow{f}(\varphi, \vartheta)$$
- Zylinderfläche vom Radius $r > 0$: $\overrightarrow{f}(\varphi, z) = r\,(\cos\varphi, \sin\varphi, z)$, $0 \le \varphi \le 2\pi$, $z \in \mathbb{R}$,
$$\overrightarrow{n}(\varphi, z) = r\,(\cos\varphi, \sin\varphi, 0)$$

Integralsätze

	Gauß'scher Integralsatz
gegeben	$v = (v_1, v_2, v_3) : B \longrightarrow \mathbb{R}^3$, B - Bereich mit stückweise glattem Rand, $F := \partial B$
Formel	$\displaystyle\iint_F \overrightarrow{v}\, d\overrightarrow{F} = \iiint_B \operatorname{div} \overrightarrow{v}(x)\, dx$

$$\operatorname{div} \overrightarrow{v}(x) = \frac{\partial v_1(x)}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2(x)}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3(x)}{\partial x_3}$$

	Stokes'scher Integralsatz
gegeben	$v = (v_1, v_2, v_3) : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $F \subset \Omega$ - einfaches Flächenstück, $\Gamma := \partial F$
Formel	$\displaystyle\int_\Gamma v(x)\, dx = \iint_F \operatorname{rot} \overrightarrow{v}\, d\overrightarrow{F}$

$$\operatorname{rot} \overrightarrow{v}(x) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial v_3(x)}{\partial x_2} - \dfrac{\partial v_2(x)}{\partial x_3} \\ \dfrac{\partial v_1(x)}{\partial x_3} - \dfrac{\partial v_3(x)}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial v_2(x)}{\partial x_1} - \dfrac{\partial v_1(x)}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \left[\frac{\partial}{\partial x_k} \right]_{k=1}^{3} \times \overrightarrow{v}(x) = \nabla \times \overrightarrow{v}(x)$$

Bemerkung: In der Ebene fallen Gauß'scher und Stokes'scher Integralsatz zusammen,

$$\int_{\partial D} (v_1\, dx_1 + v_2\, dx_2) = \iint_D \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) d(x_1, x_2)\,.$$

Folgerungen aus den Integralsätzen

- **Erste Green'sche Formel**:

$$\iiint_B \varphi\,\Delta\psi\,dx = \iint_F \varphi\,\frac{\partial\psi}{\partial\overrightarrow{n_e}}\,dF - \iiint_B \langle\nabla\varphi,\nabla\psi\rangle\;dx$$

- **Zweite Green'sche Formel**:

$$\iint_F \left(\varphi\,\frac{\partial\psi}{\partial\overrightarrow{n}_e} - \psi\,\frac{\partial\varphi}{\partial\overrightarrow{n_e}}\right) dF = \iiint_B (\varphi\Delta\psi - \psi\Delta\varphi)\,dx$$

- **Darstellungsformel** für harmonische Funktionen:

$$\psi(y) = \frac{1}{4\pi}\iint_F \frac{1}{|x-y|}\,\frac{\partial\psi(x)}{\partial\overrightarrow{n_e}}\,dF_x + \frac{1}{4\pi}\iint_F \psi(x)\,\frac{x-y}{|x-y|^3}\cdot\overrightarrow{n_e}(x)\,dF_x\,,\quad y\in\Omega$$

Beachte: In den letzten drei Formeln bezeichnet $\overrightarrow{n_e} = \overrightarrow{n_e}(x)$ die **normierte äußere Normale** an $F = \partial B$ im Punkt $x \in F$. Ist also F gegeben durch die Fläche $f(u)$, so gilt $\overrightarrow{n_e}(f(u)) = \dfrac{\overrightarrow{n}(u)}{|\overrightarrow{n}(u)|}$.