Skript zur Vorlesung

Orthogonale Polynome

WS 2018/19

Peter Junghanns

Hinweis: Das vorliegende Skript stellt nur ein Gerüst zu den Inhalten der Vorlesung dar. Die Vorlesung selbst bietet weiterführende Erläuterungen, Beweise und die ausführliche Behandlung der Beispiele.

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung **7**

1.1 Orthogonalität 7

1.2 Erzeugende Funktionen 11

1.3 Geburts- und Sterbeprozesse 12

1.4 Übungsaufgaben 13

2 Elementare Theorie der orthogonalen Polynome **15**

2.1 Momentenfunktionale 15

2.2 Übungsaufgaben 18

2.3 Rekursionsformeln und die Formel von Christoffel-Darboux 19

2.4 Nullstellen und Gauß'sche Quadraturformel 22

2.5 Die Jacobi-Polynome 26

2.6 Übungsaufgaben 28

3 Orthogonale Polynome in der komplexen Ebene **31**

3.1 Definitionen und Minimaleigenschaft 31

3.2 Lage der Nullstellen 32

3.3 Asymptotik der Nullstellen 35

4 Kettenbrüche und orthogonale Polynome **39**

4.1 Grundlagen 39

4.2 Jacobi-Brüche und orthogonale Polynome 43

4.3 Kettenfolgen 45

4.4 Kettenfolgen und orthogonale Polynome 47

5 Belegungsfunktionen und das Darstellungstheorem 51

5.1 Vorbetrachtungen 51

5.2 Das Darstellungstheorem 52

5.3 Zur Lage der Spektralpunkte einer Darstellung 53

5.4 Zur Bestimmtheit des Momentenfunktionals 54

5.5 Klassische Momentenprobleme 56

6 Integralgleichungen 57

6.1 Die Nyström-Methode 57

6.2 Kollektiv kompakte Operatorfolgen 58

6.3 Der Fall $\alpha = \beta = 0$ und $\mathbf{X} = \mathbf{C}[-1, 1]$ 59

6.4 Die Verwendung gewichteter Räume stetiger Funktionen 60

Literaturverzeichnis

[1] T. S. Chihara, An Introduction to Orthogonal Polynomials, Gordon & Breach, New York, 1978.

[2] G. Freud, Orthogonale Polynome, Berlin, 1969.

[3] P. Junghanns, EAGLE-GUIDE Orthogonale Polynome, Edition am Gutenbergplatz, Leipzig, 2009.

[4] I. P. Natanson, Konstruktive Funktionentheorie, Berlin, 1955.

[5] P. G. Nevai, Orthogonal Polynomials, Amer. Math. Soc., Rhode Island, 1979.

[6] P. Nevai, Orthogonal Polynomials, Theory and Practice, NATO ASI Series C, Vol. 294, 1990.

[7] N. Obreschkoff, Verteilung und Berechnung der Nullstellen reeller Polynome, Berlin, 1963.

[8] R. Remmert, Funktionentheorie 2, Springer-Verlag, Berlin, ..., 1992.

[9] G. Szegö, Orthogonal Polynomials, Amer. Math. Soc., Rhode Island, 1939.

Kapitel 1

Einleitung

1.1 Orthogonalität

Wir bezeichnen mit $\mathbb{K}[x]$ den linearen Raum aller Polynome der Gestalt

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0, \tag{1.1}$$

wobei $a_k \in \mathbb{K}$ Elemente eines Körpers (z.B. $\mathbb{C}$ oder $\mathbb{R}$) sind und $n \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$. Die Elemente von $\mathbb{C}[x]$ sind also Polynome mit komplexen Koeffizienten, die wir auch als Abbildungen $p : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$, $x \mapsto p(x)$ der Menge der reellen Zahlen in die Menge der komplexen Zahlen auffassen werden. Die unabhängige Veränderliche x sei also eine beliebige reelle Zahl. Ist in (1.1) der Koeffizient a_n von Null verschieden, so nennen wir $\deg p = n$ den **Grad des Polynoms** $p(x)$ und a_n den **Leitkoeffizienten** dieses Polynoms. Den linearen Teilraum von $\mathbb{C}[x]$ der Polynome, deren Grad kleiner als n ist, bezeichnen wir mit $\mathbb{C}_n[x]$, $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$.

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist bekanntlich das System $M_k(x) = x^k$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$, eine Basis in $\mathbb{C}_n[x]$, was nichts anderes bedeutet, als dass die Darstellung des Polynoms $p(x)$ aus $\mathbb{C}_{n+1}[x]$ in (1.1) eindeutig ist. Das heißt aber auch, dass jedes endliche Teilsystem des Systems $(M_n)_{n=0}^{\infty}$ linear unabhängig ist, weshalb man dieses unendliche System selbst linear unabhängig nennt. Als Beispiel definieren wir nun auf $\mathbb{C}[x]$ ein **Skalarprodukt**, auch **inneres Produkt** genannt,

$$\langle p, q \rangle = \int_a^b p(x)\overline{q(x)}\, dx, \quad p, q \in \mathbb{C}[x]. \tag{1.2}$$

Dabei halten wir $-\infty < a < b < \infty$ fest. Würden wir nun das aus der linearen Algebra bekannte Schmidt'sche Orthogonalisierungsverfahren auf das System $(M_n)_{n=0}^{\infty}$ anwenden, so erhielten wir ein System $(P_n)_{n=0}^{\infty}$ von Polynomen $P_n(x)$ mit den Eigenschaften $\deg P_n = n$,

$$\operatorname{span}\{P_0, \ldots, P_{n-1}\} = \mathbb{C}_n[x], \quad n \in \mathbb{N},$$

und

$$\langle P_k, P_j \rangle = \delta_{jk} = \begin{cases} 0 & : \quad j \neq k \\ 1 & : \quad j = k \end{cases}, \quad j, k \in \mathbb{N}_0. \tag{1.3}$$

Mit $\operatorname{span}\{P_0, \ldots, P_{n-1}\}$ wird dabei die Menge aller Linearkombinationen der Polynome P_j, $j = 0, 1 \ldots, n-1$ bezeichnet. Da diese Menge auch gleich $\operatorname{span}\{M_0, \ldots, M_{n-1}\}$ ist, sieht man leicht, dass für $k \neq j$ die Orthogonalitätsbedingungen in (1.3) äquivalent sind zu

$$\langle M_k, P_n \rangle = 0, \quad k = 0, \ldots, n-1, \ n \in \mathbb{N}. \tag{1.4}$$

Wir betrachten nun den Fall $a = -1$, $b = 1$ und die Polynome $Q_n(x) = \frac{d^n}{dx^n}(1-x^2)^n$. Unter Verwendung der Formel der partiellen Integration ergibt sich für $n \in \mathbb{N}$ und $0 < k \leq n$

$$\langle M_k, Q_n \rangle = \int_{-1}^{1} x^k \frac{d^n}{dx^n}(1-x^2)^n \, dx = -k \int_{-1}^{1} x^{k-1} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(1-x^2)^n \, dx$$

und dies fortgesetzt

$$\langle M_k, Q_n \rangle = (-1)^k k! \int_{-1}^{1} \frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}}(1-x^2)^n \, dx = \begin{cases} 0 & : \quad k = 0, \ldots, n-1, \\ (-1)^n n! \, \kappa_n & : \quad k = n, \end{cases}$$

mit $\kappa_n = \int_{-1}^{1} (1-x^2)^n \, dx$. Wiederum durch partielle Integration erhalten wir für $n \in \mathbb{N}$

$$\kappa_n = \kappa_{n-1} - \int_{-1}^{1} \left[(1-x^2)^{n-1} x\right] x \, dx = \kappa_{n-1} - \frac{1}{2n} \kappa_n$$

und somit, da $\kappa_0 = 2$ ist, [1]

$$\kappa_n = \frac{2n}{2n+1} \kappa_{n-1} = \ldots = \frac{2^n n!}{(2n+1)!!} \kappa_0 = \frac{2^{n+1} n!}{(2n+1)!!}.$$

Durch Normierung der $Q_n(x)$ wollen wir nun die Bedingung $\langle P_n, P_n \rangle = 1$ erfüllen. Dazu machen wir den Ansatz $P_n(x) = \delta_n Q_n(x)$ und fordern (der Eindeutigkeit wegen), dass der Leitkoeffizient von $P_n(x)$ positiv ist. Der Leitkoeffizient von $Q_n(x) = \frac{d^n}{dx^n}\left[(-1)^n x^{2n} + \ldots + 1\right]$ ist gleich $(-1)^n \frac{(2n)!}{n!}$. Wegen

$$\delta_n^2 \int_{-1}^{1} [Q_n(x)]^2 \, dx = \delta_n^2 (-1)^n \frac{(2n)!}{n!} \int_{-1}^{1} x^n Q_n(x) \, dx = \delta_n^2 (2n)! \, \kappa_n = \delta_n^2 \frac{2\,(2^n n!)^2}{2n+1}$$

folgt, dass für

$$\delta_n = c_n \frac{(-1)^n}{2^n n!} \quad \text{mit} \quad c_n = \sqrt{\frac{2n+1}{2}}$$

die Bedingung $\langle P_n, P_n \rangle = 1$ erfüllt ist. Der Leitkoeffizient des Polynoms $P_n(x) = \gamma_n x^n + \ldots$ ergibt sich nun zu $\gamma_n = \frac{c_n}{2^n}\binom{2n}{n}$. Das Polynom

$$L_n(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (1-x^2)^n \tag{1.5}$$

nennt man n-tes **Legendre-Polynom**. Bis auf den Faktor c_n ist es also das n-te Polynom im **orthonormalen Polynomsystem** $(P_n)_{n=0}^{\infty}$ bez. des in (1.2) definierten Skalarproduktes. Die Formel (1.5) wird nach **Rodrigues** benannt.

Die Folge $(P_n)_{n=0}^{\infty}$ von Polynomen ist Lösung des folgenden **Momentenproblems**:

Gegeben ist die Folge $(\mu_n)_{n=0}^{\infty}$ der Zahlen $\mu_n = \int_{-1}^{1} x^n \, dx = \frac{1-(-1)^{n+1}}{n+1}$. Auf der linearen Menge $\mathbb{C}[x]$ der Polynome der Gestalt (1.1) definiert man das lineare Funktional $\mathcal{L}$ durch

$$\mathcal{L}[p] = a_n \mu_n + a_{n-1} \mu_{n-1} + \ldots + a_1 \mu_1 + a_0 \mu_0.$$

[1] $(2n+1)!! = 1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n+1)$

Man finde nun ein System von Polynomen $P_n(x)$ mit $\deg P_n = n$, $n \in \mathbb{N}_0$, so dass die Orthogonalitätsbedingungen

$$\mathcal{L}[P_m P_n] = 0 \quad \text{für} \quad m \neq n$$

erfüllt sind. Genügen die Polynome $P_n(x)$ auch den Bedingungen

$$\mathcal{L}[P_n^2] \neq 0, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

so nennen wir die Folge $(P_n(x))_{n=0}^{\infty}$ ein **orthogonales Polynomsystem** (OPS) bez. des **Momentenfunktionals** $\mathcal{L}$. Im folgenden Kapitel werden wir die Frage beantworten, unter welchen Voraussetzungen an die Momentenfolge $(\mu_n)_{n=0}^{\infty}$ ein solches OPS existiert.

Ein anderes OPS kann man z.B. auf folgende Art und Weise gewinnen:

Aus der trigonometrischen Beziehung

$$2\,\cos m\theta\,\cos n\theta = \cos(m+n)\theta + \cos(m-n)\theta \tag{1.6}$$

folgt bekanntlich

$$\int_0^{\pi} \cos m\theta\,\cos n\theta\,d\theta = \begin{cases} 0 & , \quad m \neq n\,, \\ \pi & , \quad m = n = 0\,, \\ \dfrac{\pi}{2} & , \quad m = n \in \mathbb{N}\,. \end{cases} \tag{1.7}$$

Mit $x = \cos\theta$ und $T_n(x) = \cos n\theta$, $n \in \mathbb{N}_0$, folgt ebenfalls aus (1.6) für $m = 1$

$$2\,x\,T_n(x) = T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) \tag{1.8}$$

bzw.

$$T_{n+1}(x) = 2\,x\,T_n(x) - T_{n-1}(x)\,, \quad n \in \mathbb{N}\,. \tag{1.9}$$

Wegen $T_0(x) = 1$ und $T_1(x) = x$ zeigt die rekursive Beziehung (1.9), dass $T_n(x)$ ein Polynom n-ten Grades mit dem Leitkoeffizienten 2^{n-1} für $n \in \mathbb{N}$ ist. Aus (1.7) folgt

$$\int_{-1}^{1} T_m(x) T_n(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} 0 & , \quad m \neq n\,, \\ \pi & , \quad m = n = 0\,, \\ \frac{\pi}{2} & , \quad m = n \in \mathbb{N}\,. \end{cases} \tag{1.10}$$

Das Polynom $T_n(x)$ nennt man **Tschebyscheff-Polynom erster Art** und n-ten Grades, die Funktion $(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ **Tschebyscheff-Gewicht erster Art**.

Schreiben wir (1.8) in matrizieller Form, so erhalten wir

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & & & 0 \\ 1 & 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 0 & 1 \\ 0 & & & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_0(x) \\ T_1(x) \\ \vdots \\ T_{m-2}(x) \\ T_{m-1}(x) \end{bmatrix} = 2x \begin{bmatrix} T_0(x) \\ T_1(x) \\ \vdots \\ T_{m-2}(x) \\ T_{m-1}(x) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ T_m(x) \end{bmatrix}.$$

Die Eigenwerte der $m \times m$-Matrix auf der linken Seite dieser Gleichung sind damit genau die Zahlen

$$2\cos\frac{(2k-1)\pi}{2m}\,, \quad k = 1, \ldots, m.$$

Normieren wir die Polynome $T_n(x)$ zu $\widetilde{T}_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} T_n(x)$, $n \in \mathbb{N}$ und $\widetilde{T}_0(x) = \sqrt{\frac{1}{\pi}}$, so erhalten wir aus (1.9)

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\widetilde{T}_{n+1}(x) &= x\widetilde{T}_n(x) - \frac{1}{2}\widetilde{T}_{n-1}(x)\,, \quad n = 2, 3, \dots\,, \\
\frac{1}{2}\widetilde{T}_2(x) &= x\widetilde{T}_1(x) - \frac{1}{\sqrt{2}}\widetilde{T}_0(x)\,, \\
\frac{1}{\sqrt{2}}\widetilde{T}_1(x) &= x\widetilde{T}_0(x)\,.
\end{aligned}$$

Die Zahlen $\cos\frac{2k-1}{2m}$, $k = 1, \dots, m$ sind somit die Eigenwerte der diesen Rekursionsformeln entsprechenden symmetrischen tridiagonalen Matrix

$$\begin{bmatrix}
0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & & & 0 \\
\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{2} & & \\
 & \ddots & \ddots & \ddots & \\
 & & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\
0 & & & \frac{1}{2} & 0
\end{bmatrix}.$$

Es zeigt sich nun, dass man durch Betrachtung des Polynoms $xP_n(x) = M_1(x)P_n(x)$ unter Verwendung der Orthogonalitätsrelationen (1.4) eine Rekursionsformel für die Polynome $P_n(x)$ analog zu (1.8) erhalten kann. Es gilt ja die Darstellung

$$M_1 P_n = \sum_{k=0}^{n+1} \varepsilon_{nk} P_k,$$

wobei $\varepsilon_{nk} = \langle M_1 P_n, P_k\rangle = \langle P_n, M_1 P_k\rangle = 0$ für $k = 0, \dots, n-2$ ist. Da $x[P_n(x)]^2$ offenbar eine ungerade Funktion ist, gilt auch $\varepsilon_{nn} = 0$. Für die restlichen beiden Koeffizienten erhalten wir $\varepsilon_{n,n+1} = \gamma_n\langle M_{n+1}, P_{n+1}\rangle = \gamma_n\gamma_{n+1}^{-1}\langle P_{n+1}, P_{n+1}\rangle = \gamma_n\gamma_{n+1}^{-1}$ und $\varepsilon_{n,n-1} = \gamma_{n-1}\langle P_n, M_n\rangle = \gamma_{n-1}\gamma_n^{-1}$. Damit haben wir die Formel

$$\beta_{n+1}P_{n+1}(x) = xP_n(x) - \beta_n P_{n-1}, \quad n \in \mathbb{N}_0, \tag{1.11}$$

mit $\beta_n = \gamma_{n-1}\gamma_n^{-1}$ bewiesen, wobei wir $P_{-1}(x) \equiv 0$ gesetzt haben. Wir werden sehen, dass eine solche dreigliedrige Rekursionsformel charakteristisch für orthogonale Polynomsysteme ist und dass sie es erlaubt, numerisch interessante Parameter der orthogonalen Polynome effizient zu berechnen. Solche Parameter sind z. B. die Nullstellen dieser Polynome, die man als Eigenwerte schwach besetzter Matrizen erhält. Schreibt man nämlich die Formeln (1.11) gleichzeitig für $n = 0, 1, \dots, m-1$ in matrizieller Form

$$\begin{bmatrix}
0 & \beta_1 & & & 0 \\
\beta_1 & 0 & \beta_2 & & \\
 & \ddots & \ddots & \ddots & \\
 & & \beta_{m-2} & 0 & \beta_{m-1} \\
0 & & & \beta_{m-1} & 0
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} P_0(x) \\ P_1(x) \\ \vdots \\ P_{m-2}(x) \\ P_{m-1}(x) \end{bmatrix}
= x \begin{bmatrix} P_0(x) \\ P_1(x) \\ \vdots \\ P_{m-2}(x) \\ P_{m-1}(x) \end{bmatrix}
- \beta_m \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ P_m(x) \end{bmatrix}, \tag{1.12}$$

so sieht man, dass eine Nullstelle des m-ten orthogonalen Polynoms $P_m(x)$ zugleich Eigenwert der tridiagonalen Matrix in (1.12) ist.

1.2 Erzeugende Funktionen

Wir betrachten die Funktion zweier Veränderlicher ($a \neq 0$)

$$G(x,w) = e^{-aw}(1+w)^x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-a)^m w^m}{m!} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{x}{n} w^n . \tag{1.13}$$

Die hier auftretenden Reihen betrachten wir stets in einem geeigneten Konvergenzkreis bzw. Konvergenzintervall. Bilden wir das Cauchy-Produkt der beiden Reihen in (1.13), so erhalten wir

$$G(x,w) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) w^n \tag{1.14}$$

mit

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{x}{k} \frac{(-a)^{n-k}}{(n-k)!} . \tag{1.15}$$

Wegen $\binom{x}{k} = \dfrac{x(x-1)\cdots(x-k+1)}{k!}$ ist $P_n(x)$ ein Polynom n-ten Grades. Die Funktion $G(x,w)$ heißt **erzeugende Funktion** der Polynome $P_n(x)$, die auch **Charlier-Polynome** genannt werden. Aus (1.13) folgt

$$a^x G(x,v)G(x,w) = e^{-a(v+w)}[a(1+v)(1+w)]^x$$

und somit

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k G(k,v)G(k,w)}{k!} &= e^{-a(v+w)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{[a(1+v)(1+w)]^k}{k!} \\ &= e^{-a(v+w)} e^{a(1+v)(1+w)} = e^a e^{avw} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^a a^n (vw)^n}{n!} . \end{aligned} \tag{1.16}$$

Unter Verwendung von (1.14) erhalten wir

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k G(k,v)G(k,w)}{k!} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!} \sum_{m,n=0}^{\infty} P_m(k)P_n(k) v^m w^n \\ &= \sum_{m,n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} P_m(k)P_n(k) \frac{a^k}{k!} \right) v^m w^n . \end{aligned} \tag{1.17}$$

Koeffizientenvergleich in (1.16) und (1.17) liefert

$$\sum_{k=0}^{\infty} P_m(k)P_n(k) \frac{a^k}{k!} = \begin{cases} 0 & , \quad m \neq n , \\ \dfrac{e^a a^n}{n!} & , \quad m = n . \end{cases} \tag{1.18}$$

Definieren wir also

$$\mu_n = \mathcal{L}[M_n] = \sum_{k=0}^{\infty} k^n \frac{a^k}{k!} , \tag{1.19}$$

so folgt aus (1.18)

$$\mathcal{L}[P_m P_n] = \frac{e^a a^n}{n!} \delta_{mn} .$$

Das Polynomsystem $(P_n)_{n=0}^{\infty}$ ist also ein OPS bzgl. des durch (1.19) definierten Momentenfunktionals $\mathcal{L}$.

1.3 Geburts- und Sterbeprozesse

Wir modellieren einen Geburts- und Sterbeprozess (ein spezieller Markov-Prozess, dessen Zustandsraum die Menge $\mathbb{N}_0$ der nichtnegativen ganzen Zahlen ist). Mit $p_{mn}(t)$, $m,n \in \mathbb{N}_0$, $t \geq 0$, bezeichnen wir die sog. Übergangswahrscheinlichkeiten. Das bedeutet, $p_{mn}(t)$ ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das System (z. B. die Größe einer Population) während der Zeitspanne t vom Zustand m zum Zustand n übergeht. Die Matrix $P(t) = [\,p_{mn}(t)\,]_{m,n=0}^{\infty}$ wird Übergangsmatrix genannt. Dabei soll $p_{mn}(t)$ wirklich nur von m, n, t abhängen und nicht davon, wie und wann das System den Zustand m erreicht hat (stationärer Prozess). Das ist äquivalent zu der Bedingung

$$P(s+t) = P(s)P(t). \tag{1.20}$$

Für $t \longrightarrow +0$ mögen die Übergangswahrscheinlichkeiten den folgenden Bedingungen genügen[2]:

$$p_{mn}(t) = \begin{cases} \lambda_m t + o(t) & : \quad n = m+1, \\ 1 - \lambda_m t - \eta_m t + o(t) & : \quad n = m, \\ \eta_m t + o(t) & : \quad n = m-1 \end{cases} \tag{1.21}$$

und

$$\sum_{n=0}^{m-2} p_{mn}(t) + \sum_{n=m+2}^{\infty} p_{mn}(t) = o(t). \tag{1.22}$$

Die Koeffizienten λ_m und η_m nennt man die Geburts- bzw. Sterberate im Zustand m. Sie sollen die Bedingungen

$$\lambda_m > 0,\ \ \eta_{m+1} > 0,\ \ m \in \mathbb{N}_0,\ \ \eta_0 \geq 0 \tag{1.23}$$

erfüllen. Es sei nun $\Delta t > 0$. Aus der Bedingung (1.20) folgt die Gleichung $P(t+\Delta t) = P(t)P(\Delta t)$, d. h. wegen (1.21)

$$\begin{aligned} p_{mn}(t+\Delta t) &= \sum_{k=0}^{\infty} p_{mk}(t) p_{kn}(\Delta t) \\ &= p_{m,n-1}(t)\lambda_{n-1}\Delta t + p_{m,n+1}(t)\eta_{n+1}\Delta t \\ &\qquad + p_{mn}(t)[1 - (\lambda_n + \eta_n)\Delta t] + o(\Delta t). \end{aligned}$$

(Größen mit negativen Indizes sind Null zu setzen.) Es folgt

$$\begin{aligned} \frac{p_{mn}(t+\Delta t) - p_{mn}(t)}{\Delta t} &= \lambda_{n-1} p_{m,n-1}(t) + \eta_{n+1} p_{m,n+1}(t) \\ &\qquad - (\lambda_n + \eta_n) p_{mn}(t) + \frac{o(\Delta t)}{\Delta t}, \end{aligned}$$

woraus sich für $\Delta t \longrightarrow +0$ die Gleichung

$$p'_{mn}(t) = \lambda_{n-1} p_{m,n-1}(t) + \eta_{n+1} p_{m,n+1}(t) - (\lambda_n + \eta_n) p_{mn}(t)$$

ergibt. Verwendet man die Beziehung $P(t+\Delta t) = P(\Delta t)P(t)$, so ergibt sich analog

$$p'_{mn}(t) = \lambda_m p_{m+1,n}(t) + \eta_m p_{m-1,n}(t) - (\lambda_m + \eta_m) p_{mn}(t).$$

[2] Mit $o(t)$ werden Größen bezeichnet, für die $\lim_{t \to +0} o(t)/t = 0$ gilt.

Die letzten beiden Gleichungen nennt man **rückwärtige** bzw. **vorwärtige Chapman-Kolmogorov-Gleichungen**. Wir machen nun den Separationsansatz $p_{mn}(t) = f(t)Q_m F_n$ und erhalten aus den rückwärtigen Chapman-Kolmogorov-Gleichungen

$$\frac{f'(t)}{f(t)} = \frac{\lambda_{n-1}F_{n-1} + \eta_{n+1}F_{n+1} - (\lambda_n + \eta_n)F_n}{F_n} =: -x.$$

Bis auf eine multiplikative Konstante ist also $f(t) = e^{-x\,t}$. Die F_n hängen offenbar von x ab, weshalb wir auch $F_n(x)$ schreiben. Vereinbarungsgemäß ist $F_{-1}(x) \equiv 0$, und wir erhalten

$$\eta_{n+1}F_{n+1}(x) = (\lambda_n + \eta_n - x)F_n(x) - \lambda_{n-1}F_{n-1}(x), \tag{1.24}$$

$n \in \mathbb{N}_0$. Die Funktion $F_0(x)$ kann offenbar beliebig gewählt werden. Damit sind die $F_n(x)$ z. B. durch die Anfangsbedingungen $F_{-1}(x) \equiv 0$, $F_0(x) \equiv 1$ festgelegt. Analog sind die Funktionen $Q_n(x)$ durch die Anfangsbedingungen $Q_{-1}(x) \equiv 0$, $Q_0(x) \equiv 1$ und die rekursive Beziehung

$$\lambda_n Q_{n+1}(x) = (\lambda_n + \eta_n - x)Q_n(x) - \eta_n Q_{n-1}(x),$$

$n \in \mathbb{N}_0$, eindeutig bestimmt. Das Polynomsystem $(\varepsilon_n Q_n)_{n=0}^{\infty}$ mit

$$\varepsilon_0 = 1 \quad \text{und} \quad \varepsilon_n = \frac{\lambda_0 \cdots \lambda_{n-1}}{\eta_1 \cdots \eta_n},\; n \in \mathbb{N},$$

erfüllt offenbar die gleichen Anfangsbedingungen und Rekursionsgleichungen wie das Polynomsystem $(F_n)_{n=0}^{\infty}$. Der Separationsansatz führt also auf

$$p_{mn}(t) = \frac{1}{\varepsilon_m}\, e^{-x\,t} F_m(x)F_n(x),$$

wobei $x \geq 0$ gelten muss, damit $p_{mn}(t)$ für $t \longrightarrow +\infty$ beschränkt bleibt. Wir bemerken, dass wir wieder auf ein System von Polynomen gestoßen sind, welches einer zu (1.11) ähnlichen Rekursionsformel genügt (siehe (1.24)). In der Theorie der orthogonalen Polynome kann man zeigen, dass eine solche Rekursionsformel die Existenz einer Momentenfolge $(\mu_n)_{n=0}^{\infty}$ garantiert, bezüglich der das System $(F_n)_{n=0}^{\infty}$ OPS ist, und dass zu einer solchen Momentenfolge auch eine Belegungsfunktion $\Omega(x)$ mit der Eigenschaft

$$\mu_n = \int_0^{\infty} x^n \, d\Omega(x), \quad n \in \mathbb{N}_0$$

existiert.

1.4 Übungsaufgaben

1. Wir definieren[3]

$$T_n^0(x) = \frac{(-1)^n\sqrt{1-x^2}}{(2n-1)!!}\,\mathbf{D}^n(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}, \quad n \in \mathbb{N}\,,\; \mathbf{D} = \frac{d}{dx}\,, \quad T_0^0(x) \equiv 1\,.$$

   (a) Beweisen Sie, dass für die Tschebyscheff-Polynome $T_n(x)$ erster Art die Gleichheit

$$T_n(x) = T_n^0(x)\,,\; n \in \mathbb{N}\,,$$

   gilt.

[3] $(2n-1)!! = 1 \cdot 3 \cdots (2n-1)$

(b) Verwenden Sie diese Darstellung von $T_n(x)$ zum Beweis der Orthogonalitätsrelationen (1.10).

2. Die Tschebyscheff-Polynome $U_n(x)$ **zweiter Art** können durch die Formel

$$U_n(x) = \frac{\sin[(n+1)\vartheta]}{\sin\vartheta}\,,\ x = \cos\vartheta, \quad n \in \mathbb{N}_0\,,$$

definiert werden.

(a) Zeigen Sie, dass $U_n(x)$ ein Polynom (in x) n-ten Grades ist und dass die Orthogonalitätsbeziehungen

$$\int_{-1}^{1} U_m(x)U_n(x)\sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}\delta_{mn} \tag{1.25}$$

erfüllt sind.

(b) Beweisen Sie die Formel

$$U_n(x) = \frac{(-1)^n(n+1)}{(2n+1)!!\,\sqrt{1-x^2}}\,\mathbf{D}^n(1-x^2)^{n+\frac{1}{2}}\,, \quad n \in \mathbb{N}_0\,,$$

und verwenden Sie diese zum Beweis der Orthogonalitätsrelationen (1.25).

3. Für $x = \cos\vartheta$ definieren wir

$$R_n(x) = \frac{\cos[(n+\frac{1}{2})\vartheta]}{\cos\frac{\vartheta}{2}}\,, \quad n \in \mathbb{N}_0\,.$$

Beweisen Sie

(a) $R_n(x) = \dfrac{T_n(x)+T_{n+1}(x)}{1+x},\ n \in \mathbb{N}_0\,,$

(b) $R_0(x) = 1\,,\ R_1(x) = 2x-1\,,\ R_{n+1}(x) = 2xR_n(x) - R_{n-1}(x)\,,\ n \in \mathbb{N}\,,$

(c) $\displaystyle\int_{-1}^{1} R_m(x)R_n(x)\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,dx = \pi\delta_{mn}\,.$

4. Es sei $F(x,w) = e^{-(x-w)^2}$. Beweisen Sie

(a) $H_n(x) = e^{x^2}\dfrac{\partial^n}{\partial w^n}F(x,0) = e^{x^2}(-1)^n\mathbf{D}^n e^{-x^2}$ ist ein Polynom n-ten Grades,

(b) $G(x,w) := e^{2xw-w^2} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} H_n(x)\frac{w^n}{n!}\,,$

(c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} G(x,v)G(x,w)e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}\,e^{2vw}\ \left(\text{Hinweis: } \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}\right),$

(d) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} H_m(x)H_n(x)e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}\,2^n n!\,\delta_{mn}\,.$

$H_n(x)$ ist das sogenannte Hermite-Polynom n-ten Grades.

Kapitel 2

Elementare Theorie der orthogonalen Polynome

2.1 Momentenfunktionale. Existenz OPS

Definition 2.1 *Für eine gegebene Zahlenfolge* $(\mu_n)_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ *definieren wir das dieser Folge entsprechende* **Momentenfunktional** $\mathcal{L}$ *auf dem linearen Raum* $\mathbb{C}[x]$ *aller (algebraischen) Polynome in* x *durch*

$$\mathcal{L}[M_n] = \mu_n\,, \quad n \in \mathbb{N}_0\,,\, M_n(x) = x^n\,,$$

und

$$\mathcal{L}[\alpha_1\pi_1 + \alpha_2\pi_2] = \alpha_1\mathcal{L}[\pi_1] + \alpha_2\mathcal{L}[\pi_2]\,, \quad \alpha_j \in \mathbb{C}\,,\ \pi_j \in \mathbb{C}[x]\,.$$

Die Zahl μ_n *heißt* **Moment** n**-ter Ordnung**.

Die Koeffizienten der Polynome sind im Allg. komplexe Zahlen, während die unabhängige Variable x hier als reell betrachtet wird.

Definition 2.2 *Eine Folge* $(P_n)_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{C}[x]$ *heißt* **orthogonales Polynomsystem** *(OPS) bzgl. des Momentenfunktionals* $\mathcal{L}$, *wenn* $\forall\, m, n \in \mathbb{N}_0$ *folgende zwei Bedingungen erfüllt sind:*

(a) $\deg P_n = n\,,$

(b) $\mathcal{L}[P_m P_n] = k_n \delta_{mn}\,, \quad k_n \neq 0\,.$

Im Fall $k_n = 1\,,\ n \in \mathbb{N}_0\,,$ *nennt man* $(P_n)_{n=0}^{\infty}$ *ein* **orthonormales** *Polynomsystem (ONPS).*

Man sieht sofort, dass nicht für alle Folgen $(\mu_n)_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ ein OPS existiert, z.B. falls $\mu_0 = 0$. Es existiert z.B. aber auch kein OPS, wenn $\mu_0 = \mu_1 = \mu_2 = 1$ ist, denn sonst wäre für $P_0(x) = a$ und $P_1(x) = bx + c$

$$0 = \mathcal{L}[P_0 P_1] = a(b + c)\,, \text{ d.h. } c = -b$$

und somit

$$\mathcal{L}[P_1^2] = \mathcal{L}[b^2(x-1)^2] = b^2(\mu_2 - 2\mu_1 + \mu_0) = 0\,.$$

Satz 2.3 *Es seien $\mathcal{L}$ ein Momentenfunktional und $(P_n)_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{C}[x]$ eine Folge von Polynomen mit* deg $P_n = n$. *Dann sind folgende Aussagen zueinander äquivalent:*

(a) $(P_n)_{n=0}^{\infty}$ *ist OPS bzgl.* $\mathcal{L}$.

(b) Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ *gilt*

$$\mathcal{L}[\pi P_n] = 0 \quad \forall\, \pi \in \mathbb{C}_n[x]$$

und

$$\mathcal{L}[\pi P_n] \neq 0 \quad \forall \pi \in \mathbb{C}[x] \text{ mit } \deg \pi = n\,.$$

(c) Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ *gilt*

$$\mathcal{L}[M_m P_n] = \widetilde{k}_n \delta_{mn}\,, \quad m = 0, 1, \ldots, n\,,\ \widetilde{k}_n \neq 0\,.$$

Bemerkung 2.4 *Es sei* $(P_n)_{n=0}^{\infty}$ *ein OPS bzgl. des Momentenfunktionals* $\mathcal{L}$.

(a) Aus $\pi = \sum_{k=0}^{n} \gamma_k P_k \in \mathbb{C}[x]$ *folgt* $\gamma_k = \dfrac{\mathcal{L}[\pi P_k]}{\mathcal{L}[P_k^2]}$, $k = 0, 1, \ldots, n$.

(b) Ist $(Q_n)_{n=0}^{\infty}$ *ein weiteres OPS bzgl.* $\mathcal{L}$, *so folgt aus (a) und Satz 2.3,(b)*

$$Q_n = \delta_n P_n\,,\ \delta_n \neq 0\,, \quad n \in \mathbb{N}_0\,.$$

(c) Sind alle $P_n(x)$ *monisch, d.h.* $P_n(x) = x^n + \cdots$, *so heißt* $(P_n)_{n=0}^{\infty}$ **monisches** *OPS.*

(d) Das Polynomsystem $(p_n)_{n=0}^{\infty}$ *mit*

$$p_n(x) = \left(\mathcal{L}[P_n^2]\right)^{-\frac{1}{2}} P_n(x)\,, \quad n \in \mathbb{N}_0\,,$$

ist ein ONPS bzgl. $\mathcal{L}$. *Dabei bezeichnet* $\left(\mathcal{L}[P_n^2]\right)^{\frac{1}{2}}$ *eine Lösung der Gleichung* $z^2 = \mathcal{L}[P_n^2]$.

Für eine gegebene Momentenfolge $(\mu_n)_{n=0}^{\infty}$ definieren wir

$$\Delta_n = \det\left[\ \mu_{j+k}\ \right]_{j,k=0}^{n} = \det \begin{bmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \mu_n \\ \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mu_n & \mu_{n+1} & \cdots & \mu_{2n} \end{bmatrix}.$$

Satz 2.5 *Es sei* $\mathcal{L}$ *ein Momentenfunktional mit der Folge* $(\mu_n)_{n=0}^{\infty}$. *Für die Existenz eines OPS bzgl.* $\mathcal{L}$ *ist notwendig und hinreichend, dass*

$$\Delta_n \neq 0\,, \quad n \in \mathbb{N}_0\,,$$

gilt.

Beweis. Es sei $(P_n)_{n=0}^{\infty}$ ein OPS bzgl. $\mathcal{L}$, $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \gamma_{nk} x^k$. Aus Satz 2.3,(c) folgt dann

$$\mathcal{L}[M_m P_n] = \sum_{k=0}^{n} \gamma_{nk} \mu_{k+m} = \widetilde{k}_n \delta_{mn}\,,\ m \leq n\,,\ \widetilde{k}_n \neq 0\,,$$

d.h.

$$\begin{bmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \mu_n \\ \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mu_{n-1} & \mu_n & \cdots & \mu_{2n-1} \\ \mu_n & \mu_{n+1} & \cdots & \mu_{2n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_{n0} \\ \gamma_{n1} \\ \vdots \\ \gamma_{n,n-1} \\ \gamma_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \widetilde{k}_n \end{bmatrix}. \tag{2.1}$$

Aus Bemerkung 2.4,(a),(b) folgt, dass $P_n(x)$ für gewähltes $\widetilde{k}_n$ eindeutig bestimmt ist, was die eindeutige Lösbarkeit von (2.1) bedeutet. Ist umgekehrt $\Delta_n \neq 0$, so ist (2.1) eindeutig lösbar, d.h. $P_n(x)$ existiert, und es gilt

$$\gamma_{nn} = \frac{\widetilde{k}_n \Delta_{n-1}}{\Delta_n} \neq 0\,, \quad n \in \mathbb{N}_0\,, \tag{2.2}$$

wobei wir $\Delta_{-1} = 1$ gesetzt haben. □

Es seien $(P_n)_{n=0}^{\infty}$ ein OPS bzgl. $\mathcal{L}$ und $\pi_n \in \mathbb{C}[x]$ ein Polynom n-ten Grades mit dem Leitkoeffizienten α_n, d.h. $\pi_n(x) = \alpha_n x^n + \cdots$. Dann gilt wegen (2.2)

$$\mathcal{L}[\pi_n P_n] = \alpha_n \widetilde{k}_n = \frac{\alpha_n \gamma_n \Delta_n}{\Delta_{n-1}}\,, \tag{2.3}$$

wobei γ_n den Leitkoeffizienten von $P_n(x)$ bezeichnet.

Definition 2.6 *Ein Momentenfunktional $\mathcal{L}$ heißt* **positiv definit**, *wenn $\mathcal{L}[\pi] > 0$ für jedes Polynom $\pi \in \mathbb{C}[x]$ mit $\pi(x) \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$, und $\pi(x) \not\equiv 0$ gilt.*

Ist $\mathcal{L}$ positiv definit, so folgt $\mu_{2n} = \mathcal{L}[M_{2n}] > 0$, $n \in \mathbb{N}_0$, und wegen

$$0 < \mathcal{L}[(x+1)^{2n}] = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} \mu_k$$

gilt $\mu_{2n+1} \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}_0$. Ferner kann man mittels $\langle p, q \rangle := \mathcal{L}[p\overline{q}]$ auf $\mathbb{C}[x]$ ein (positiv definites) Skalarprodukt definieren. Der Schmidt'sche Orthogonalisierungsprozess angewendet auf das System $\{M_0, M_1, M_2, \ldots\}$ liefert dann ein ONPS $(p_n)_{n=0}^{\infty}$ mit $p_n \in \mathbb{R}[x]$.

Lemma 2.7 *Für $\pi \in \mathbb{C}[x]$ gilt $\pi(x) \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$, genau dann, wenn Polynome $p, q \in \mathbb{R}[x]$ existieren, so dass $\pi(x) = [p(x)]^2 + [q(x)]^2$ gilt.*

Beweis. Ist $\pi(x) \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$, so ist offenbar π ein Element von $\mathbb{R}[x]$. Ferner haben alle reellen Nullstellen gerade Vielfachheit. Es existieren also $r \in \mathbb{R}[x]$ und $\alpha_k, \beta_k \in \mathbb{R}$, so dass

$$\pi(x) = [r(x)]^2 \prod_{k=1}^{m} (x - \alpha_k - \mathbf{i}\beta_k)(x - \alpha_k + \mathbf{i}\beta_k)$$

gilt. Mit der Bezeichnung $A(x) + \mathbf{i}B(x) = \prod_{k=1}^{m}(x - \alpha_k + \mathbf{i}\beta_k)$, wobei $A, B \in \mathbb{R}[x]$, folgt

$$\pi(x) = [r(x)]^2 \left([A(x)]^2 + [B(x)]^2\right) .$$

$\square$

Satz 2.8 *Ein Momentenfunktional $\mathcal{L}$ ist genau dann positiv definit, wenn alle Momente reell sind und $\Delta_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt.*

Beweis. Hinlänglichkeit. Nach Satz 2.5 existiert ein monisches OPS $(P_n)_{n=0}^{\infty}$ bzgl. $\mathcal{L}$. Aus (2.3) folgt

$$\widetilde{k}_n = \mathcal{L}[P_n^2] = \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}} > 0 ,$$

und wegen (2.1) sind alle Polynome P_n aus $\mathbb{R}[x]$. Für ein beliebiges Polynom $p \in \mathbb{R}[x]$, $p(x) = \sum_{k=0}^{m} \alpha_k P_k(x)$, $\alpha_m \neq 0$, gilt somit

$$\mathcal{L}[p^2] = \sum_{j,k=0}^{m} \alpha_j \alpha_k \mathcal{L}[P_j P_k] = \sum_{k=0}^{m} \alpha_k^2 \mathcal{L}[P_k^2] > 0 .$$

Infolge von Lemma 2.7 ist $\mathcal{L}$ also positiv definit.

Notwendigkeit. Es existiert ein monisches OPS bzgl. $\mathcal{L}$. Nach Definition 2.6 und (2.3) gilt somit

$$0 < \mathcal{L}[P_n^2] = \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}} , \quad n \in \mathbb{N}_0$$

Aus $\Delta_{-1} = 1$ folgt somit $\Delta_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. $\square$

Folgerung 2.9 *Aus dem Beweis von Satz 2.8 erkennt man, dass ein Momentenfunktional $\mathcal{L}$ positiv definit ist, falls ein OPS $(P_n)_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{R}[x]$ mit $\mathcal{L}[P_n^2] > 0$, $n \in \mathbb{N}_0$, existiert.*

Definition 2.10 *Ein Momentenfunktional $\mathcal{L}$ nennt man* **quasi-definit**, *falls $\Delta_n \neq 0$, $n \in \mathbb{N}_0$.*

2.2 Übungsaufgaben

1. Es sei $\mathcal{L}[M_n] = a^n$, $n \geq 0$, wobei $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Man zeige, dass für $\mathcal{L}$ **kein** OPS existiert.

2. Man zeige, dass es **kein** Momentenfunktional gibt, für das $(M_n)_{n=0}^{\infty}$ ein OPS ist.

3. Es seien $\mathcal{L}$ ein Momentenfunktional, für welches ein OPS existiert, und $\{c_n\}$ eine Folge von Null verschiedener Zahlen. Man zeige, dass jede der folgenden Bedingungen das OPS $(P_n)_{n=0}^{\infty}$ zu $\mathcal{L}$ eindeutig bestimmt:

   (a) $\mathcal{L}[M_n P_n] = c_n$, $n \in \mathbb{N}_0$,

(b) $\lim\limits_{x\to 0} x^n P_n(1/x) = c_n$, $n \in \mathbb{N}_0$.

4. Ausgehend von bekannten Polynomsystemen bestimme man Polynomsysteme $(P_n)_{n=0}^{\infty}$, welche den folgenden Bedingungen genügen:

(a) $\displaystyle\int_0^1 P_m(x)\, P_n(x)\, (1-x)^{-\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{2}} dx = k_n \delta_{mn}$, $k_0 = \pi$, $k_n = \dfrac{\pi}{2}$, $n \in \mathbb{N}_0$,

(b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} P_m(x)\, P_n(x)\, e^{-x^2/2} dx = \sqrt{2\pi}\, n!\, \delta_{mn}$,

(c) $\displaystyle\int_0^1 P_m(x)\, P_n(x)\, dx = \frac{1}{2n+1}\, \delta_{mn}$.

5. Es sei $\mathcal{L}$ ein quasi–definites Momentenfunktional mit der Momentenfolge $\{\mu_n\}$. Man zeige, dass $\{(\Delta_{n-1})^{-1} D_n\}$ mit

$$D_n(x) = \det \begin{bmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \ldots & \mu_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mu_{n-1} & \mu_n & \ldots & \mu_{2n-1} \\ 1 & x & \ldots & x^n \end{bmatrix}$$

das monische OPS zu $\mathcal{L}$ ist, und bestimme ein ONPS für $\mathcal{L}$.

6. Es sei $\mathcal{L}$ ein quasi-definites Momentenfunktional. Man beweise: Ist $\deg \pi_n = n$, $n \in \mathbb{N}_0$, und $\mathcal{L}[\pi_m \pi_n] = 0$ für $m \neq n$, so ist $(\pi_n)_{n=0}^{\infty}$ ein OPS für $\mathcal{L}$.

7. Es sei $\mathcal{L}$ ein quasi-definites Momentenfunktional. Man zeige, dass aus $\pi \in \mathbb{C}[x]$ und $\mathcal{L}[\pi\, M_n] = 0$, $n \in \mathbb{N}_0$, stets $\pi(x) \equiv 0$ folgt.

8. Es seien $\mathcal{L}$ positiv definit und $(P_n)_{n=0}^{\infty}$ das monische OPS für $\mathcal{L}$. Man beweise, dass dann $\mathcal{L}[P_n^2] < \mathcal{L}[|\pi|^2]$ für jedes monische Polynom $\pi(x) \not\equiv P_n(x)$ mit $\deg \pi(x) = n$ gilt.

2.3 Rekursionsformeln und die Formel von Christoffel-Darboux

Satz 2.11 *Sind das Momentenfunktional $\mathcal{L}$ quasi-definit und $(P_n)_{n=0}^{\infty}$ das zugehörige monische OPS, so existieren Zahlen $\alpha_n, \beta_n \in \mathbb{C}$ mit $\beta_n \neq 0$ und*

$$P_{n+1}(x) = (x - \alpha_n) P_n(x) - \beta_n P_{n-1}(x) , \quad n \in \mathbb{N}_0 , \tag{2.4}$$

wobei $P_{-1}(x) \equiv 0$, $P_0(x) \equiv 1$ und β_0 beliebig ist. Im Fall eines positiv definiten Momentenfunktionals $\mathcal{L}$ gilt $\alpha_n \in \mathbb{R}$ und $\beta_n > 0$.

Beweis. Für $xP_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n+1} \alpha_{nk} P_k(x)$ gilt

$$\alpha_{nk} = \frac{\mathcal{L}[M_1 P_n P_k]}{\mathcal{L}[P_k^2]} = 0 , \quad k = 0, 1, \ldots, n-2 , \quad \text{und} \quad \alpha_{n,n+1} = 1 .$$

Es folgt

$$xP_n(x) = P_{n+1}(x) + \alpha_{nn} P_n(x) + \alpha_{n,n-1} P_{n-1}(x) ,$$

womit (2.4) bewiesen ist. Aus dieser Beziehung und aus (2.3) folgt weiterhin für $n \geq 1$

$$0 = \mathcal{L}[M_{n-1}P_{n+1}] = \mathcal{L}[M_nP_n] - \beta_n\mathcal{L}[M_{n-1}P_{n-1}] = \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}} - \beta_n\frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_{n-2}}$$

und somit

$$\beta_n = \frac{\Delta_n\Delta_{n-2}}{\Delta_{n-1}^2}\,.$$

Aus Satz 2.8 ergibt sich damit $\beta_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$, falls $\mathcal{L}$ positiv definit ist. □

Folgerung 2.12 *Aus (2.4) und dem Beweis von Satz 2.11 ergeben sich folgende Beziehungen:*

1. *Es gilt*
$$\beta_n = \frac{\Delta_{n-2}\Delta_n}{\Delta_{n-1}^2} = \frac{\mathcal{L}[P_n^2]}{\mathcal{L}[P_{n-1}^2]}\,, \quad n \in \mathbb{N}\,.$$
2. *Wir vereinbaren* $\beta_0 = \mu_0 = \Delta_0$. *Dann ist*
$$\mathcal{L}[P_n^2] = \beta_0\beta_1\cdots\beta_n\,, \quad n \in \mathbb{N}_0\,.$$
3. *Es gilt*
$$\alpha_n = \frac{\mathcal{L}[M_1P_n^2]}{\mathcal{L}[P_n^2]}\,, \quad n \in \mathbb{N}_0\,.$$
4. *Das n-te monische orthogonale Polynom gestattet die Darstellung*
$$P_n(x) = x^n - (\alpha_0 + \alpha_1 + \ldots + \alpha_{n-1})x^{n-1} + \ldots\,,$$
denn für $P_{n+1}(x) = x^{n+1} + d_nx^n + \ldots$ *erhalten wir aus* (2.4) $d_n = d_{n-1} - \alpha_n$.

Beispiel 2.13 *Das monische OPS* $\left(\widehat{T}_n(x)\right)_{n=0}^{\infty}$ *zum Tschebysheff-Gewicht erster Art ist gegeben durch*

$$\widehat{T}_0(x) = T_0(x) \quad \text{und} \quad \widehat{T}_n(x) = 2^{1-n}T_n(x)\,,\ n \in \mathbb{N}\,.$$

Aus (1.9) *folgt*

$$\widehat{T}_1(x) = x\,\widehat{T}_0(x)\,,\ \widehat{T}_2(x) = x\,\widehat{T}_1(x) - \frac{1}{2}\,\widehat{T}_0(x)$$

und

$$\widehat{T}_{n+1}(x) = x\,\widehat{T}_n(x) - \frac{1}{4}\,\widehat{T}_{n-1}(x)\,, \quad n = 2, 3, \ldots\,,$$

so dass in diesem Fall $\alpha_n = 0$ *für* $n \geq 0$ *und* $\beta_1 = \frac{1}{2}$ *sowie* $\beta_n = \frac{1}{4}$ *für* $n \geq 2$ *gilt.*

Satz 2.14 (Favard/Shohat/Natanson) *Zu beliebigen Zahlenfolgen* $(\alpha_n)_{n=0}^{\infty}$, $(\beta_n)_{n=0}^{\infty}$ *und einem Polynomsystem* $\{P_n\}_{n=-1}^{\infty}$ *mit* $P_{-1}(x) \equiv 0$ *und* $P_0(x) \equiv 1$, *welches* (2.4) *genügt, existiert genau ein Momentenfunktional* $\mathcal{L}$ *mit den Eigenschaften*

$$\mathcal{L}[P_0] = \beta_0 \quad \text{und} \quad \mathcal{L}[P_mP_n] = 0\,,\ m \neq n\,.$$

Dieses Momentenfunktional $\mathcal{L}$ *ist genau dann quasi-definit, wenn* $\beta_n \neq 0$ *für alle* $n \in \mathbb{N}_0$ *gilt, und genau dann positiv definit, wenn* $(\alpha_n)_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ *und* $\beta_n > 0$ *für alle* $n \in \mathbb{N}_0$ *erfüllt ist.*

Beweis. Wir setzen $\mu_0 := \mathcal{L}[P_0] = \beta_0$. Die Momentenfolge $(\mu_n)_{n=1}^\infty$ ist dann rekursiv durch die Bedingungen $\mathcal{L}[P_n] = 0$, $n \in \mathbb{N}$, eindeutig bestimmt. Aus

$$x\,P_n(x) = P_{n+1}(x) + \alpha_n P_n(x) + \beta_n P_{n-1}(x)$$

folgt dann

$$\mathcal{L}[M_1 P_n] = 0\,,\ \forall\, n \geq 2\,, \quad \mathcal{L}[M_2 P_n] = 0\,,\ \forall\, n \geq 3\,, \quad \ldots\,,$$

d.h.

$$\mathcal{L}[M_k P_n] = 0\,,\ 0 \leq k \leq n-1\,,\ n \in \mathbb{N}\,,$$

und

$$\mathcal{L}[M_n P_n] = \beta_n \mathcal{L}[M_{n-1} P_{n-1}] = \ldots = \beta_n \beta_{n-1} \cdots \beta_0\,,$$

woraus auch alle weiteren Aussagen des Theorems folgen. □

Satz 2.15 (Christoffel/Darboux) *Das Polynomsystem* $\{P_n\}_{n=-1}^\infty$ *genüge der Rekursionsformel* (2.4) *mit* $\beta_n \neq 0$, $n \in \mathbb{N}_0$. *Dann gilt*

$$\sum_{k=0}^n \frac{P_k(x)P_k(t)}{\beta_0 \cdots \beta_k} = \frac{1}{\beta_0 \cdots \beta_n} \, \frac{P_{n+1}(x)P_n(t) - P_n(x)P_{n+1}(t)}{x-t}\,. \tag{2.5}$$

Beweis. Aus (2.4) ergibt sich

$$x\,P_n(x)P_n(t) = P_{n+1}(x)P_n(t) + \alpha_n P_n(x)P_n(t) + \beta_n P_{n-1}(x)P_n(t)$$

und

$$t\,P_n(x)P_n(t) = P_n(x)P_{n+1}(t) + \alpha_n P_n(x)P_n(t) + \beta_n P_n(x)P_{n-1}(t)\,.$$

Mit

$$F_n(x,t) := \frac{P_{n+1}(x)P_n(t) - P_n(x)P_{n+1}(t)}{\beta_0 \cdots \beta_n (x-t)}$$

folgt daraus

$$\frac{P_n(x)P_n(t)}{\beta_0 \cdots \beta_n} = F_n(x,t) - F_{n-1}(x,t)$$

und somit die Behauptung. □

Aus dem monischen OPS $(P_n(x))_{n=0}^\infty$ zu einem positiv definiten Momentenfunktional berechnet sich ein ONPS $(\widetilde{p}_n(x))_{n=0}^\infty$ nach den Formeln

$$\widetilde{p}_n(x) = k_n P_n(x)\,, \quad k_n = (\beta_0 \cdots \beta_n)^{-\frac{1}{2}}\,.$$

Aus (2.4) folgt dann

$$\sqrt{\beta_{n+1}}\,\widetilde{p}_{n+1}(x) = (x - \alpha_n)\widetilde{p}_n(x) - \sqrt{\beta_n}\,\widetilde{p}_{n-1}(x)\,, \quad n \in \mathbb{N}_0 \tag{2.6}$$

und aus (2.5)

$$\sum_{k=0}^n \widetilde{p}_k(x)\widetilde{p}_k(t) = \frac{k_n}{k_{n+1}} \, \frac{\widetilde{p}_{n+1}(x)\widetilde{p}_n(t) - \widetilde{p}_n(x)\widetilde{p}_{n+1}(t)}{x-t}\,. \tag{2.7}$$

Aus (2.5) folgt außerdem für $t \longrightarrow x$

$$\sum_{k=0}^n \frac{[P_k(x)]^2}{\beta_0 \cdots \beta_k} = \frac{P'_{n+1}(x)P_n(x) - P'_n(x)P_{n+1}(x)}{\beta_0 \cdots \beta_n}\,. \tag{2.8}$$

Im Fall eines positiv definiten Momentenfunktionals gilt also

$$P'_{n+1}(x)P_n(x) - P'_n(x)P_{n+1}(x) > 0\,. \tag{2.9}$$

2.4 Nullstellen und Gauß'sche Quadraturformel

Definition 2.16 *Eine Menge $E \subset \mathbb{R}$ heißt eine* **Trägermenge** *von $\mathcal{L}$, wenn aus $P(x) \geq 0$ auf E und $P(x) \not\equiv 0$ auf E folgt, dass $\mathcal{L}[P] > 0$ gilt. Man nennt in diesem Fall $\mathcal{L}$ auch* **positiv definit auf** *E.*

Im Weiteren seien $\mathcal{L}$ positiv definit und $(P_n)_{n=0}^{\infty}$ das zugehörige monische OPS.

Satz 2.17 *Es seien (a,b) eine Trägermenge von $\mathcal{L}$ und $n \in \mathbb{N}$. Dann sind alle Nullstellen von $P_n(x)$ reell, einfach und in (a,b) gelegen.*

Beweis. Aus $\mathcal{L}[P_n] = 0$ folgt die Existenz wenigstens einer Nullstelle $x_1 \in (a,b)$ ungerader Vielfachheit von $P_n(x)$. Mit $x_1, \ldots, x_k$ seien alle Nullstellen ungerader Vielfachheit von $P_n(x)$ in (a,b) bezeichnet. Wir setzen $p(x) = \pm(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_k)$, so dass $p(x)P_n(x) \geq 0$ auf (a,b) gilt. Es folgt $\mathcal{L}[pP_n] > 0$. Das bedeutet aber $k \geq n$. □

Unter den Voraussetzungen des Satzes 2.17 bezeichnen wir die Nullstellen von $P_n(x)$ mit x_{nk} und vereinbaren $x_{nn} < x_{n,n-1} < \cdots < x_{n1}$. Es folgt $\operatorname{sgn} P_n(x) = 1$ für $x > x_{n1}$ und $\operatorname{sgn} P_n(x) = (-1)^n$ für $x < x_{nn}$. Das Polynom $P_n'(x)$ hat genau eine Nullstelle im Intervall $(x_{nk}, x_{n,k-1})$, $k = 2, \ldots, n$, und es gilt

$$\operatorname{sgn} P_n'(x_{nk}) = (-1)^{k-1} . \tag{2.10}$$

Satz 2.18 *Es gilt $x_{n+1,k+1} < x_{nk} < x_{n+1,k}$, $k = 1, \ldots, n$.*

Beweis. Aus (2.9) folgt

$$P_{n+1}'(x_{n+1,k})P_n(x_{n+1,k}) > 0\,, \quad k = 1, \ldots, n+1\,,$$

und somit aus (2.10) $\operatorname{sgn} P_n(x_{n+1,k}) = (-1)^{k-1}$. □

Folgerung 2.19 *Für alle $k \geq 1$ sind die Folge $\{x_{nk}\}_{n=k}^{\infty}$ monoton wachsend und die Folge $\{x_{n,n-k+1}\}_{n=k}^{\infty}$ monoton fallend. Somit existieren*

$$\xi_k := \lim_{n\to\infty} x_{nk} \quad \textit{und} \quad \eta_k := \lim_{n\to\infty} x_{n,n-k+1}$$

(evtl. $\xi_k = +\infty$ oder/und $\eta_k = -\infty$).

Definition 2.20 *Das Intervall (η_1, ξ_1) heißt* **Träger** *des Momentenfunktionals $\mathcal{L}$.*

Mit $\ell_{nk}(x)$ bezeichnen wir die sog. **Lagrange'schen Grundpolynome**

$$\ell_{nk}(x) = \prod_{j=1, j\neq k}^{n} \frac{x - x_{nj}}{x_{nk} - x_{nj}} = \frac{P_n(x)}{(x - x_{nk})P_n'(x_{nk})}\,, \quad k = 1, \ldots, n\,.$$

Offenbar gilt $\ell_{nk}(x_{nj}) = \delta_{jk}$. Für eine Funktion $f : (\eta_1, \xi_1) \longrightarrow \mathbb{C}$ definieren wir das Lagrange'sche **Interpolationspolynom**

$$(L_n f)(x) = \sum_{k=1}^{n} f(x_{nk})\ell_{nk}(x)$$

und das Funktional, die sog. **Gauß'sche Quadraturformel**,

$$\mathcal{L}_n[f] := \mathcal{L}[L_n f] = \sum_{k=1}^{n} A_{nk} f(x_{nk}) \quad \text{mit} \quad A_{nk} = \mathcal{L}[\ell_{nk}]\,.$$

Satz 2.21 *Es gilt*

$$\mathcal{L}_n[P] = \mathcal{L}[P] \quad \forall\, P \in \mathbb{C}_{2n}[x]\,.$$

Beweis. Wir schreiben $P \in \mathbb{C}_{2n}[x]$ in der Form

$$P(x) = Q(x)P_n(x) + R(x) \quad \text{mit} \quad Q, R \in \mathbb{C}_n[x]\,.$$

Es folgt $(L_n P)(x) = (L_n R)(x)$ und somit

$$\mathcal{L}_n[P] = \mathcal{L}[L_n R] = \mathcal{L}[R] = \mathcal{L}[P]\,.$$

□

Folgerung 2.22 *Es gilt*

$$\sum_{k=1}^{n} A_{nk} = \mu_0 \quad \textit{und} \quad A_{nk} > 0\,,\ k = 1, \ldots, n\,,\ n \in \mathbb{N}\,.$$

Beweis. $0 < \mathcal{L}[\ell_{nk}^2] \overset{Satz 2.21}{=} \mathcal{L}_n[\ell_{nk}^2] = A_{nk}$. □

Mit $\mathbf{C}[\eta_1, \xi_1]$ bezeichnen wir den linearen Raum der stetigen Funktionen $f : [\eta_1, \xi_1] \longrightarrow \mathbb{C}$, der, versehen mit der Norm

$$\|f\|_\infty = \|f\|_{\infty,[\eta_1,\xi_1]} = \max\left\{|f(x)| : \eta_1 \le x \le \xi_1\right\}\,,$$

bekanntlich ein Banachraum ist. Wir können nun im Fall $-\infty < \eta_1 < \xi_1 < \infty$ den Wert $\mathcal{L}[f]$ für jedes $f \in \mathbf{C}[\eta_1, \xi_1]$ über

$$\mathcal{L}[f] = \lim_{n\to\infty} \mathcal{L}[p_n]\,,$$

definieren, wobei $p_n \in \mathbb{C}[x]$ und $\lim_{n\to\infty} \|f - p_n\|_\infty = 0$ gelte. Diese Definition ist korrekt. Dabei gilt $\mathcal{L}[f_1] \le \mathcal{L}[f_2]$, falls $f_1(x) \le f_2(x)$ für alle $x \in [\eta_1, \xi_1]$ erfüllt ist.

Folgerung 2.23 *Aus Folgerung 2.22 ergibt sich wegen $L_n p = p$ für $p \in \mathbb{C}[x]$ und für alle $n \ge n_0(p)$, dass (η_1, ξ_1) eine Trägermenge von $\mathcal{L}$ ist.*

Satz 2.24 *Ist $-\infty < \eta_1 < \xi_1 < +\infty$, so gilt $\lim_{n\to\infty} \mathcal{L}_n[f] = \mathcal{L}[f] \quad \forall\, f \in \mathbf{C}[\eta_1, \xi_1]$.*

Beweis. Offenbar gilt $\mathcal{L}_n[p] \longrightarrow \mathcal{L}[p]$ für alle $p \in \mathbb{C}[x]$ und $|\mathcal{L}_n[f]| \le \mu_0 \|f\|_\infty$. Also sind die Funktionale $\mathcal{L}_n : \mathbf{C}[\eta_1, \xi_1] \longrightarrow \mathbb{C}$ gleichmäßig beschränkt, und die Behauptung folgt aus der Dichtheit von $\mathbb{C}[x]$ in $\mathbf{C}[\eta_1, \xi_1]$ und aus dem Satz von Banach-Steinhaus. □

Satz 2.25 *Für* $-\infty < \eta_1 < \xi_1 < \infty$ *und* $f \in \mathbf{C}[\eta_1, \xi_1]$ *gilt* $\lim_{n\to\infty} \mathcal{L}[|f - L_n f|^2] = 0$.

Beweis. Es sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann existiert ein Polynom $P_\varepsilon \in \mathbb{C}[x]$ mit der Eigenschaft

$$\|f - P_\varepsilon\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2\sqrt{\mu_0}}.$$

Es folgt für alle hinreichend großen n

$$\begin{aligned}
\left\{\mathcal{L}[|f - L_n f|^2]\right\}^{\frac{1}{2}} &\leq \left\{\mathcal{L}[|f - P_\varepsilon|^2]\right\}^{\frac{1}{2}} + \left\{\mathcal{L}[|L_n(P_\varepsilon - f)|^2]\right\}^{\frac{1}{2}} \\
&= \left\{\mathcal{L}[|f - P_\varepsilon|^2]\right\}^{\frac{1}{2}} + \left\{\sum_{k=1}^{n} A_{nk}\,|P_\varepsilon(x_{nk}) - f(x_{nk})|^2\right\}^{\frac{1}{2}} \\
&< \varepsilon.
\end{aligned}$$

□

Wir definieren für $z \in \mathbb{C}$

$$\mathcal{L}_z^*[M_n] = \mathcal{L}[(x - z)x^n] = \mu_{n+1} - z\,\mu_n$$

und

$$P_n^z(x) = \frac{1}{x - z}\left[P_{n+1}(x) - \frac{P_{n+1}(z)}{P_n(z)}\,P_n(x)\right],$$

wobei $P_n(z) \neq 0$ für alle $n \geq 1$ erfüllt sei. Aus (2.5) zusammen mit Folgerung 2.12, 2. folgt

$$P_n^z(x) = \frac{\beta_0\beta_1\cdots\beta_n}{P_n(z)} \sum_{k=0}^{n} \widetilde{p}_k(x)\widetilde{p}_k(z). \tag{2.11}$$

Satz 2.26 *Das Momentenfunktional* $\mathcal{L}_z^*$ *ist quasi-definit und* $(P_n^z)_{n=0}^\infty$ *ist das zugehörige monische OPS. Das Momentenfunktional* $\mathcal{L}_z^*$ *ist genau dann positiv definit, wenn* $z \leq \eta_1$ *gilt.*

Beweis. Die Richtigkeit der ersten Behauptung ergibt sich aus

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_z^*[M_k P_n^z] &= \mathcal{L}[M_k P_{n+1}] - \frac{P_{n+1}(z)}{P_n(z)}\,\mathcal{L}[M_k P_n] \\
&= -\frac{P_{n+1}(z)}{P_n(z)}\,\mathcal{L}[M_n P_n]\delta_{nk}, \quad k = 0, 1, \ldots, n.
\end{aligned}$$

Sind $z \leq \eta_1$ und $\pi(x) \geq 0$, $\pi(x) \not\equiv 0$, so ist wegen Folgerung 2.23 $\mathcal{L}_z^*[\pi] = \mathcal{L}[(x - z)\pi] > 0$. Ist umgekehrt $\mathcal{L}_z^*$ positiv definit, so gilt

$$0 < \mathcal{L}_z^*\left[\frac{P_n^2}{(x - x_{nn})^2}\right] = \mathcal{L}\left[\frac{(x - z)P_n^2}{(x - x_{nn})^2}\right] \overset{Satz 2.21}{=} A_{nn}(x_{nn} - z)\left[P_n'(x_{nn})\right]^2,$$

woraus $z < x_{nn}$, $n \in \mathbb{N}$, also $z \leq \eta_1$ folgt. □

Wegen (2.11) gilt

$$K_n(z,x) := \frac{1}{\beta_0\beta_1\cdots\beta_n}\,P_n(z)P_n^z(x) = \sum_{k=0}^n \widetilde{p}_k(x)\widetilde{p}_k(z)\,, \quad x,z\in\mathbb{R}\,.$$

Für $w,z\in\mathbb{C}$ definieren wir

$$K_n(z,w) = \sum_{k=0}^n \widetilde{p}_k(w)\overline{\widetilde{p}_k(z)} = \sum_{k=0}^n \widetilde{p}_k(w)\widetilde{p}_k(\overline{z})\,.$$

Satz 2.27 *Für beliebiges $z_0\in\mathbb{C}$ und $n\in\mathbb{N}$ gilt*

$$\frac{1}{K_n(z_0,z_0)} = \min\left\{\mathcal{L}[|\pi|^2] : \pi\in\mathbb{C}_{n+1}[x],\ \pi(z_0)=1\right\}$$

und

$$A_{nk} = \frac{1}{K_{n-1}(x_{nk},x_{nk})} = \frac{1}{K_n(x_{nk},x_{nk})}\,, \quad k=1,\ldots,n\,.$$

Beweis. Es seien $\pi(x) = \sum_{k=0}^n c_k\widetilde{p}_k(x)$, $c_k = \mathcal{L}[\pi\widetilde{p}_k]$ und $\pi(z_0) = \sum_{k=0}^n c_k\widetilde{p}_k(z_0) = 1$. Dann gilt

$$\mathcal{L}[|\pi|^2] = \mathcal{L}[\overline{\pi}\pi] = \sum_{k=0}^n |c_k|^2$$

und

$$1 \le \sum_{k=0}^n |c_k|^2 \sum_{k=0}^n |\widetilde{p}_k(z_0)|^2 = \mathcal{L}[|\pi|^2]\,K_n(z_0,z_0)\,.$$

Dabei steht anstelle des Ungleichheitszeichens genau dann das Gleichheitszeichen, wenn ein $A\in\mathbb{C}$ mit der Eigenschaft $c_k = A\overline{\widetilde{p}_k(z_0)}$, $k=0,1,\ldots,n$, existiert, woraus $A\sum_{k=0}^n \overline{\widetilde{p}_k(z_0)}\widetilde{p}_k(z_0) = 1$, d.h. $A = \dfrac{1}{K_n(z_0,z_0)}$, folgt. Damit ist

$$\mathcal{L}[|\pi|^2] \ge \frac{1}{K_n(z_0,z_0)} \quad \forall\,\pi\in\mathbb{C}[n+1;x] \quad \text{mit} \quad \pi(z_0)=1$$

und

$$\mathcal{L}[|\pi|^2] = \frac{1}{K_n(z_0,z_0)} \quad \text{für} \quad \pi(x) = A\,K_n(z_0,x)\,.$$

Aus Satz 2.21 folgt

$$A_{nk} = \mathcal{L}_n[\ell_{nk}^2] = \mathcal{L}[\ell_{nk}^2] \ge \frac{1}{K_{n-1}(x_{nk},x_{nk})}$$

und für $\pi(x) = A\,K_n(x_{nk},x)$

$$\mathcal{L}[|\pi|^2] = \sum_{j=1}^n A_{nj}|\pi(x_{nj})|^2 \ge A_{nk}\,, \quad \text{falls} \quad \pi(x_{nk})=1\,.$$

□

Wir bemerken, dass die Formel für die A_{nk} in Satz 2.27 auch aus der Darstellung

$$\ell_{nk}(x) = A_{nk}\sum_{j=0}^{n-1}\widetilde{p}_j(x_{nk})\widetilde{p}_j(x)\,, \quad k=1,\ldots,n\,,$$

der Lagrange'schen Grundpolynome folgt.

2.5 Die Jacobi-Polynome

Es sei $\alpha > -1$, $\beta > -1$. Für $n \in \mathbb{N}_0$ definiert man die **Jacobi-Polynome** über die **Rodriguessche Formel** (vgl. auch Abschnitt 1.4, Übungsaufgabe 1)

$$P_n^{\alpha,\beta}(x) = \frac{(1-x)^{-\alpha}(1+x)^{-\beta}}{(-2)^n\, n!} \frac{d^n}{dx^n} \left[(1-x)^{n+\alpha}(1+x)^{n+\beta}\right] . \tag{2.12}$$

Lemma 2.28 *Es gilt*

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n+\alpha}{n-k}\binom{n+\beta}{k} = \binom{2n+\alpha+\beta}{n}, \quad n \in \mathbb{N}_0 .$$

Beweis. Aus

$$(1+z)^\alpha = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{\alpha}{j} z^j$$

folgt

$$\sum_{j=0}^{\infty} \binom{2n+\alpha+\beta}{j} z^j = (1+z)^{n+\alpha}(1+z)^{n+\beta} = \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{j} \binom{n+\alpha}{j-k}\binom{n+\beta}{k} z^j .$$

Vergleich der Koeffizienten bei z^n liefert die Behauptung. □

Aus (2.12) und

$$\begin{aligned}
&\frac{d^n}{dx^n}\left[(1-x)^{n+\alpha}(1+x)^{n+\beta}\right] \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left[\frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}}(1-x)^{n+\alpha}\right]\left[\frac{d^k}{dx^k}(1+x)^{n+\beta}\right] \\
&= (1-x)^\alpha(1+x)^\beta \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!}(-1)^{n-k}(n+\alpha)\cdots(k+\alpha+1)(1-x)^k \cdot \\
&\qquad \cdot (n+\beta)\cdots(n+\beta-k+1)(1+x)^{n-k} \\
&= (-1)^n(1-x)^\alpha(1+x)^\beta n! \sum_{k=0}^{n} \binom{n+\alpha}{n-k}\binom{n+\beta}{k}(x-1)^k(x+1)^{n-k}
\end{aligned}$$

folgt

$$P_n^{\alpha,\beta}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n+\alpha}{n-k}\binom{n+\beta}{k}\left(\frac{x-1}{2}\right)^k\left(\frac{x+1}{2}\right)^{n-k} . \tag{2.13}$$

Nach Lemma 2.28 hat $P_n^{\alpha,\beta}(x)$ also den Leitkoeffizienten

$$k_n^{\alpha,\beta} = 2^{-n}\sum_{k=0}^{n} \binom{n+\alpha}{n-k}\binom{n+\beta}{k} = 2^{-n}\binom{2n+\alpha+\beta}{n} . \tag{2.14}$$

Die monischen Jacobi-Polynome bezeichnen wir mit $\widehat{P}_n^{\alpha,\beta}(x)$, d.h.

$$\widehat{P}_n^{\alpha,\beta}(x) = \frac{1}{k_n^{\alpha,\beta}} P_n^{\alpha,\beta}(x) .$$

Mittels partieller Integration zeigt man, dass für $n \in \mathbb{N}_0$

$$\int_{-1}^{1} x^k P_n^{\alpha,\beta}(x)(1-x)^\alpha(1+x)^\beta \, dx \begin{cases} = 0 & , \quad k = 0,\ldots,n-1 , \\ > 0 & , \quad k = n , \end{cases}$$

gilt. Also ist $\left(P_n^{\alpha,\beta}\right)_{n=0}^{\infty}$ ein OPS, und wir leiten nun Formeln für die Koeffizienten α_n und β_n in der Rekursionsformel

$$\widehat{P}_{n+1}^{\alpha,\beta}(x) = (x-\alpha_n)\widehat{P}_n^{\alpha,\beta}(x) - \beta_n \widehat{P}_{n-1}^{\alpha,\beta}(x) , \quad n = 0,1,\ldots \tag{2.15}$$

der monischen Jacobi-Polynome her. Wir definieren

$$(\alpha)_n := \begin{cases} 1 & : \quad n = 0 , \\ \prod_{k=1}^{n} (k+\alpha) & : \quad n \in \mathbb{N} . \end{cases}$$

Aus (2.13) folgt

$$P_n^{\alpha,\beta}(1) = \binom{n+\alpha}{n} \quad \text{und} \quad P_n^{\alpha,\beta}(-1) = (-1)^n \binom{n+\beta}{n} ,$$

so dass

$$\widehat{P}_n^{\alpha,\beta}(1) = \frac{2^n \binom{n+\alpha}{n}}{\binom{2n+\alpha+\beta}{n}} = \frac{2^n (\alpha)_n (\alpha+\beta)_n}{(\alpha+\beta)_{2n}}$$

und

$$\widehat{P}_n^{\alpha,\beta}(-1) = \frac{(-2)^n \binom{n+\beta}{n}}{\binom{2n+\alpha+\beta}{n}} = \frac{(-2)^n (\beta)_n (\alpha+\beta)_n}{(\alpha+\beta)_{2n}} .$$

Es folgt

$$1 - \alpha_0 = \widehat{P}_1^{\alpha,\beta}(1) = \frac{2(1+\alpha)}{2+\alpha+\beta} , \quad \text{d.h.} \quad \alpha_0 = \frac{\beta-\alpha}{2+\alpha+\beta} .$$

Für $n \in \mathbb{N}$ löst man das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \widehat{P}_{n+1}^{\alpha,\beta}(1) &= (1-\alpha_n)\widehat{P}_n^{\alpha,\beta}(1) - \beta_n \widehat{P}_{n-1}^{\alpha,\beta}(1) , \\ \widehat{P}_{n+1}^{\alpha,\beta}(-1) &= -(1+\alpha_n)\widehat{P}_n^{\alpha,\beta}(-1) - \beta_n \widehat{P}_{n-1}^{\alpha,\beta}(-1) , \end{aligned}$$

das sich aus (2.15) für $x = \pm 1$ ergibt und das sich auch in der Form

$$\frac{4(\alpha)_{n+1}(\alpha+\beta)_{n+1}}{(\alpha+\beta)_{2n+2}} = (1-\alpha_n)\frac{2(\alpha)_n(\alpha+\beta)_n}{(\alpha+\beta)_{2n}} - \beta_n \frac{(\alpha)_{n-1}(\alpha+\beta)_{n-1}}{(\alpha+\beta)_{2n-2}} \tag{2.16}$$

$$\frac{4(\beta)_{n+1}(\alpha+\beta)_{n+1}}{(\alpha+\beta)_{2n+2}} = (1+\alpha_n)\frac{2(\beta)_n(\alpha+\beta)_n}{(\alpha+\beta)_{2n}} - \beta_n \frac{(\beta)_{n-1}(\alpha+\beta)_{n-1}}{(\alpha+\beta)_{2n-2}} \tag{2.17}$$

schreiben lässt. Wir multiplizieren die Gleichung (2.16) mit $(\beta)_{n-1}$, die Gleichung (2.17) mit $(\alpha)_{n-1}$, subtrahieren (2.16) von (2.17) und erhalten wegen

$$(n+\beta)(n+1+\beta)-(n+\alpha)(n+1+\alpha)=(2n+\alpha+\beta+1)(\beta-\alpha)$$

die Gleichung

$$\begin{aligned}&\frac{2(\alpha)_{n-1}(\beta)_{n-1}(\alpha+\beta)_{n+1}(2n+\alpha+\beta+1)(\beta-\alpha)}{(\alpha+\beta)_{2n+2}}\\ &\quad=\frac{(\alpha)_{n-1}(\beta)_{n-1}(\alpha+\beta)_n[\beta-\alpha+\alpha_n(2n+\alpha+\beta)]}{(\alpha+\beta)_{2n}}\,,\end{aligned}$$

so dass

$$\alpha_n=\frac{\beta^2-\alpha^2}{(2n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta+2)}\,,\qquad n\in\mathbb{N}$$

Multiplizieren wir (2.16) mit $(\beta)_n$, (2.17) mit $(\alpha)_n$ und addieren beide Gleichungen, so folgt

$$\frac{4(\alpha)_n(\beta)_n(\alpha+\beta)_{n+1}}{(\alpha+\beta)_{2n+1}}=\frac{4(\alpha)_n(\beta)_n(\alpha+\beta)_n}{(\alpha+\beta)_{2n}}-\beta_n\,\frac{(\alpha)_{n-1}(\beta)_{n-1}(\alpha+\beta)_{n-1}(2n+\alpha+\beta)}{(\alpha+\beta)_{2n-2}}\,,$$

so dass

$$\beta_n=\begin{cases}\dfrac{4(1+\alpha)(1+\beta)}{(2+\alpha+\beta)^2(3+\alpha+\beta)}\,, & n=1\\[2ex] \dfrac{4n(n+\alpha)(n+\beta)(n+\alpha+\beta)}{(2n+\alpha+\beta-1)(2n+\alpha+\beta)^2(2n+\alpha+\beta+1)}\,, & n=2,3,\dots\end{cases}$$

2.6 Übungsaufgaben

Im weiteren bezeichnen wir mit $(P_n)_{n=0}^{\infty}$ das monische OPS zum quasi-definiten Momentenfunktional $\mathcal{L}$ mit der Momentenfolge $\{\mu_n\}$ und der zugehörigen Rekursionsformel (2.4).

1. Man beweise die Äquivalenz folgender Aussagen:
   (a) $\mathcal{L}$ ist symmetrisch, d.h. es gilt $\mu_{2n+1}=0\ \forall\, n\in\mathbb{N}_0$.
   (b) $P_n(-x)=(-1)^nP_n(x)\ \forall\, x\in\mathbb{R}\,,\ \forall\, n\in\mathbb{N}_0$.
   (c) In der Rekursionsformel (2.4) gilt $\alpha_n=0\ \forall\, n\in\mathbb{N}_0$.
2. Wir definieren $Q_n(x)=a^{-n}P_n(ax+b)$ $(a\neq 0)$. Man beweise:
   (a) $Q_{n+1}(x)=\left(x-\dfrac{\alpha_n-b}{a}\right)Q_n(x)-\dfrac{\beta_n}{a^2}\,Q_{n-1}(x)\,,$
   (b) $(Q_n)_{n=0}^{\infty}$ ist monisches OPS bzgl. der Momentenfolge $\{\eta_n\}$ mit
   $$\eta_n=a^{-n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-b)^{n-k}\mu_k\,.$$
3. Man beweise für die Polynome $P_n(x)$ aus Formel (1.15) die Gültigkeit der Rekursionsformel
   $$Q_{n+1}(x)=(x-n-a)\,Q_n(x)-a\,n\,Q_{n-1}(x),\ \ n=0,1,\dots,\ \ Q_n(x):=n!\,P_n(x)\,.$$

4. Es seien $\alpha_n = 0$ und $\beta_n < 0$, $n \in \mathbb{N}_0$. Dann ist $(P_n)_{n=0}^{\infty}$ ein OPS bezüglich eines quasi-definiten Momentenfunktionals $\mathcal{L}$. Wir definieren $\mathcal{L}^*[M_n] := \mathbf{i}^{-n}\mathcal{L}[M_n]$. Man zeige, dass $\mathcal{L}^*$ positiv definit ist, und bestimme das entsprechende monische OPS.

5. Es seien $\alpha_n = 0$, $\beta_n < 0$, $n \in \mathbb{N}$, und $\alpha_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Wir definieren $R_n(x) = \mathsf{Re}\,[\mathbf{i}^{-n}P_n(\mathbf{i}x)]$ und $I_n(x) = \mathsf{Im}\,[\mathbf{i}^{-n}P_n(\mathbf{i}x)]$. Man beweise, dass sowohl $(R_n)_{n=0}^{\infty}$ als auch $\left(\alpha_0^{-1}I_{n+1}\right)_{n=0}^{\infty}$ monische OPS bezüglich gewisser positiv definiter Momentenfunktionale sind.

6. Man beweise:

   (a) $$\frac{1 - x\,w}{1 - 2\,x\,w + w^2} = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(x)\,w^n$$

   (b) $$\frac{1}{1 - 2\,x\,w + w^2} = \sum_{n=0}^{\infty} U_n(x)\,w^n$$

7. Man zeige, dass ein monisches OPS $(P_n)_{n=0}^{\infty}$ genau dann einer Beziehung der Gestalt
$$P_{n-1}(x)\,P_n(-x) + P_{n-1}(-x)\,P_n(x) = a_n \neq 0\,, \quad n \in \mathbb{N}\,,$$
genügt, wenn in der Rekursionsformel (2.4) $\beta_n \neq 0$, $n > 0$, und $\alpha_n = 0$, $n \geq 1$, $\alpha_0 \neq 0$ gilt. Man zeige ferner, dass das entsprechende Momentenfunktional genau dann positiv definit ist, wenn die Bedingungen $(-1)^n a_1 a_n < 0$, $n \geq 1$, und $\beta_0 > 0$ erfüllt sind.

8. Es seien $(P_n)_{n=0}^{\infty}$ ein OPS und $\mathcal{M}$ ein Momentenfunktional, welches den Beziehungen $\mathcal{M}[P_0] \neq 0$ und $\mathcal{M}[P_n] = 0,\ n \in \mathbb{N}$ genügt. Man zeige, dass $\{P_n\}$ ein OPS bezüglich $\mathcal{M}$ ist.

9. Man zeige, dass für ein symmetrisches Momentenfunktional die Gewichte in der Gaußschen Quadraturformel der Beziehung $A_{n,n-k+1} = A_{nk}$ genügen.

10. Es seien $\mathcal{L}$ positiv definit und $K_n(z,x)$ wie im Abschnitt 2.4 definiert. Man zeige, dass für jedes Polynom $\pi \in \mathbb{C}[x]$ und $n \geq \deg \pi(x)$ die Formel $\pi(t) = \mathcal{L}[\pi\, K_n(.,t)]$ gilt.

11. Man zeige, dass die normierten Jacobi-Polynome $p_n^{\alpha,\beta}(x)$ durch
$$p_n^{\alpha,\beta}(x) = \left[h_n^{\alpha,\beta}\right]^{-1} P_n^{\alpha,\beta}(x) \tag{2.18}$$
mit
$$h_n^{\alpha,\beta} = \sqrt{\frac{2^{\alpha+\beta+1}\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}{(2n+\alpha+\beta+1)\Gamma(\alpha+\beta+2)}}$$
gegeben sind (vgl. [3, Formel (3.1)]).

12. Man beweise, dass für $n \in \mathbb{N}$ die Formeln
$$\frac{d\,P_n^{\alpha,\beta}(x)}{dx} = \frac{1}{2}(n+\alpha+\beta+1)P_{n-1}^{\alpha+1,\beta+1}(x)\,, \tag{2.19}$$
$$\frac{d\,p_n^{\alpha,\beta}(x)}{dx} = \gamma_n^{\alpha,\beta} p_{n-1}^{\alpha+1,\beta+1}(x) \tag{2.20}$$
mit $\gamma_n^{\alpha,\beta} = \sqrt{n(n+\alpha+\beta+1)}$ und
$$(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}p_n^{\alpha,\beta}(x) = -\frac{1}{\gamma_n^{\alpha,\beta}}\frac{d}{dx}\left[(1-x)^{\alpha+1}(1+x)^{\beta+1}p_{n-1}^{\alpha+1,\beta+1}(x)\right] \tag{2.21}$$
(vgl. [3, Formel (3.4) und Aufgabe 3.1]) gültig sind.

Kapitel 3

Orthogonale Polynome in der komplexen Ebene

3.1 Definitionen und Minimaleigenschaft

Sei μ ein positives Maß auf den Borelmengen der komplexen Ebene. Der Träger $S = S(\mu) = \operatorname{supp}(\mu) = \overline{\{z \in \mathbb{C} : \mu\{w \in \mathbb{C} : |w-z| < \varepsilon\} > 0 \;\forall\, \varepsilon > 0\}}$ von μ sei kompakt und enthalte unendlich viele Punkte. Wir definieren das innere Produkt

$$\langle f, g\rangle = \int f(z)\overline{g(z)}\, d\mu(z)\,, \quad f, g \in \mathbb{C}[z]\,.$$

Beispiele:

- $E \subset \mathbb{C}$ offen und beschränkt, $\langle f, g\rangle = \int_E f(z)\overline{g(z)}w(z)\, d(x,y)$ mit $z = x + \mathbf{i}y$, $x, y \in \mathbb{R}$, $w(z) \geq 0$ auf E, $0 < \int_E w(z)\, d(x,y) < \infty$.
- $\Gamma \subset \mathbb{C}$ beschränkte Kurve, $\langle f, g\rangle = \int_\Gamma f(z)\overline{g(z)}w(z)\, ds(z)$, ds - Bogenmaß auf Γ, $w(z) \geq 0$ auf Γ, $0 < \int_\Gamma w(z)\, ds(z) < \infty$.

Da der Träger S unendlich viele Punkte enthält, sind die Funktionen $1, z, \ldots, z^n, \ldots$ auf S linear unabhängig. Das Schmidtsche Orthogonalisierungsverfahren liefert damit eine eindeutig bestimmte Folge $(\widetilde{p}_n)_{n=0}^\infty$ von Polynomen

$$\widetilde{p}_n(z) = \widetilde{p}_n(z;\mu) = \gamma_n z^n + \ldots \in \mathbb{C}_{n+1}[z] \quad \text{mit} \quad \gamma_n > 0 \quad \text{und} \quad \langle \widetilde{p}_m, \widetilde{p}_n\rangle = \delta_{mn}\,.$$

Mit $P_n(z) = P_n(z;\mu) = \dfrac{1}{\gamma_n}\widetilde{p}_n(z;\mu)$ bezeichnen wir wieder die entsprechenden monischen orthogonalen Polynome.

Satz 3.1 *Ein Polynom $P_n(z) = z^n + \ldots \in \mathbb{C}_{n+1}[z]$ ist genau dann orthogonales Polynom n-ten Grades , wenn*

$$\int |P_n(z)|^2\, d\mu = \min\left\{\int |Q_n(z)|^2\, d\mu : Q_n(z) = z^n + \ldots\right\}$$

gilt.

Beweis. Wir betrachten folgendes Minimierungsproblem: Gesucht ist ein Polynom

$$\widetilde{q}_{n-1}(z) = \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j \widetilde{p}_j(z) \in \mathbb{C}_n[z]\,,$$

so dass

$$\int |z^n - \widetilde{q}_{n-1}(z)|^2 \, d\mu = \min \left\{ \int |z^n - q_{n-1}(z)|^2 \, d\mu : q_{n-1}(z) \in \mathbb{C}_n[z] \right\} .$$

Bekanntlich ist $\widetilde{q}_{n-1}(z)$ eindeutig bestimmt, und es gilt $\alpha_j = \langle z^n, \widetilde{p}_j \rangle$. Wir setzen $\widetilde{Q}_n(z) = z^n - \widetilde{q}_{n-1}(z)$. Es folgt

$$\langle \widetilde{Q}_n, \widetilde{p}_j \rangle = \langle z^n, \widetilde{p}_j \rangle - \langle \widetilde{q}_{n-1}, \widetilde{p}_j \rangle = 0\,, \quad j = 0, \ldots, n-1\,,$$

also $\widetilde{Q}_n(z) = P_n(z)$. Da sowohl $P_n(z)$ als auch $\widetilde{q}_{n-1}(z)$ eindeutig bestimmt sind, ist der Satz bewiesen. □

3.2 Lage der Nullstellen

Wir erinnern daran, dass im Fall $S \subset [a,b] \subset \mathbb{R}$, alle Nullstellen von $P_n(z;\mu)$ reell und einfach sind und in (a,b) liegen.

Satz 3.2 *Sämtliche Nullstellen von $P_n(z;\mu)$ liegen in der konvexen Hülle* $\mathrm{conv}(S)$ *des Trägers von μ.*

Beweis. Seien $P_n(z_0) = 0$, $z_0 \notin \mathrm{conv}(S)$, $P_n(z) = (z-z_0)q(z)$, $q(z) \in \mathbb{C}_n[z]$. Es gibt eine Gerade g, die z_0 und S trennt. Sei $\widetilde{z}_0$ der Fußpunkt des Lotes von z_0 auf g. Dann gilt $|z - \widetilde{z}_0| < |z - z_0|$ $\forall\, z \in S$ und somit $\forall\, z \in S$ mit $P(z) \neq 0$ auch $|(z-\widetilde{z}_0)q(z)| < |(z-z_0)q(z)| = |P(z)|$. Da $|S| = \infty$, folgt $\displaystyle\int |(z-\widetilde{z}_0)q(z)|^2 \, d\mu < \int |P_n(z)|^2 \, d\mu$ im Widerspruch zu Satz 3.1. □

Satz 3.3 *Falls* $\mathrm{conv}(S)$ *kein Segment ist, liegen alle Nullstellen des Polynoms $P_n(z;\mu)$ im Inneren der konvexen Hülle* $\mathrm{conv}\,(S)$ *des Trägers von μ.*

Beweis. Nach Satz 3.2 ist zu zeigen, dass keine Nullstelle von $P_n(z) = P_n(z;\mu)$ auf dem Rand Γ von $\mathrm{conv}\,(S)$ liegt. Annahme: $P_n(z_0) = 0$, $z_0 \in \Gamma$. Durch Drehung und Translation erreichen wir die Situation, dass $z_0 = r_0 \in \mathbb{R}$ und $\mathrm{conv}\,(S) \subset \{z \in \mathbb{C} : \mathsf{Re}\, z \leq r_0\}$ gilt. Wir haben also $P_n(z) = (z - r_0)q(z)$, $q(z) \in \mathbb{C}_n[z]$, und definieren

$$I(r) := \int |z - r|^2 \, |q(z)|^2 \, d\mu = \int \Big(|z|^2 + r^2 - 2r\, \mathsf{Re}\, z \Big) \, |q(z)|^2 \, d\mu\,, \quad r \in \mathbb{R}\,.$$

Satz 3.1 impliziert

$$0 = I'(r_0) = 2 \int (r_0 - \mathsf{Re}\, z)\, |q(z)|^2 \, d\mu\,.$$

Da $\mathsf{Re}\, z \leq r_0$ $\forall\, z \in S$, folgt $(r_0 - \mathsf{Re}\, z)\, |q(z)|^2 = 0$ μ-f.ü. Also liegen links von der Geraden $g_0 = \{z \in \mathbb{C} : \mathsf{Re}\, z = r_0\}$ nur endlich viele Punkte von S, und in diesen verschwindet $q(z)$. Da $\mathrm{conv}\,(S)$ kein Segment ist, existiert ein $z_1 \in (S \cap \Gamma) \setminus g_0$. Es folgt $q(z_1) = 0$ und damit $P_n(z_1) = 0$. Analog folgt nun, dass nur endlich viele Punkte von S links von einer Stützgeraden in z_1 an $\mathrm{conv}\,(S)$ liegen. Also liegen auf g_0 auch nur endlich viele Punkte von S im Widerspruch zu $|S| = \infty$. □

Es ist möglich, dass alle Nullstellen von $P_n(z)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ außerhalb von S liegen, z.B. für $S \subset \mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.

Wir setzen $\overline{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{P_\infty\}$. Mit $D_\infty(S)$ bezeichnen wir die Zusammenhangskomponente von $\overline{\mathbb{C}} \setminus S$, die den unendlich fernen Punkt P_∞ enthält (d.h. $D_\infty(S)$ ist offen, zusammenhängend und unbeschränkt). Die Menge $\mathrm{Pconv}(S) := \mathbb{C} \setminus D_\infty(S)$ nennt man **polynomiale konvexe Hülle** von S .

Ist $S = \mathbb{T}$, so ist $\mathrm{Pconv}(S) = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$. Ist aber $S = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1, \, \mathsf{Im}\, z \geq 0\}$, so gilt $\mathrm{Pconv}(S) = S$.

- Jede auf $\mathrm{Pconv}(S)$ holomorphe Funktion kann gleichmäßig auf S durch Polynome approximiert werden (siehe, z.B., [8, Kapitel 12]).

Lemma 3.4 *Sei $E \subset \mathbb{C}$ kompakt und $E \cap \mathrm{Pconv}(S) = \emptyset$ (d.h. $E \subset D_\infty(S)$). Dann existieren ein $m \in \mathbb{N}$ und ein $\alpha \in (0,1)$, so dass für beliebige m Zahlen $z_1, \dots, z_m \in E$ Zahlen $w_1, \dots, w_m \in \mathbb{C}$ mit der Eigenschaft*

$$\prod_{k=1}^{m} \left| \frac{z - w_k}{z - z_k} \right| \leq \alpha \quad \forall z \in S$$

existieren.

Beweis. Sei vorerst $E = \{0\}$. Dann ist die Aussage äquivalent zur Existenz eines monischen Polynoms $Q(z) = z^m + \ldots \in \mathbb{C}_{m+1}[z]$ mit $|Q(z) z^{-m}| \leq \alpha < 1 \;\; \forall\, z \in S$ bzw. zu

$$\left| \xi^m Q\left(\frac{1}{\xi}\right) \right| \leq \alpha < 1 \quad \forall\, \xi \in S^{-1} = \left\{ \xi \in \mathbb{C} : \frac{1}{\xi} \in S \right\} .$$

Aus $0 \notin \mathrm{Pconv}(S)$ folgt die Kompaktheit von S^{-1} und $0 \notin \mathrm{Pconv}(S^{-1})$. Damit ist die Funktion $f : \mathrm{Pconv}(S) \longrightarrow \mathbb{C}$, $\xi \mapsto \xi^{-1}$ holomorph. Die obige Bedingung ist äquivalent zu

$$|1 - \xi\, q(\xi)| = |\xi|\, |f(\xi) - q(\xi)| \leq \alpha < 1 \quad \forall\, \xi \in S^{-1}$$

Anwendung obiger Aussage liefert die Behauptung.

Sei nun E eine beliebige kompakte Menge mit $E \cap \mathrm{Pconv}(S) = \emptyset$. Nach dem bereits Bewiesenen gilt:

$$\forall\, z^* \in E \;\exists\, m(z^*) \in \mathbb{N}, \;\; \alpha(z^*) \in (0,1)\,, \;\; w_k(z^*) \in \mathbb{C} : \prod_{k=1}^{m(z^*)} \left| \frac{z - w_k(z^*)}{z - z^*} \right| < \alpha(z^*) < 1 \quad \forall\, z \in S$$

Es folgt die Existenz eines $\varepsilon(z^*) > 0$, so dass

$$\prod_{k=1}^{m(z^*)} \left| \frac{z - w_k(z^*)}{z - z_k} \right| < \alpha(z^*) < 1 \quad \forall\, z \in S\,, \;\forall\, z_1, ..., z_{m(z^*)} \in U_\varepsilon(z^*) \quad \text{und} \quad \overline{U_{\varepsilon(z^*)}(z^*)} \cap S = \emptyset\,.$$

Die Familie $\{U_{\varepsilon(z^*)}(z^*)\}_{z^* \in E}$ ist eine offene Überdeckung von E , so dass eine endliche Teilüberdeckung

$$E \subset \bigcup_{j=1}^{N} U_{\varepsilon(z_j^*)}(z_j^*)$$

existiert. Wegen $E \cap S = \emptyset$ folgt aus den Eigenschaften stetiger Funktionen auf kompakten Mengen

$$M_j := \sup \left\{ \prod_{k=1}^{\ell} \left| \frac{z - w_k(z_j^*)}{z - z_k} \right| : \ell = 0, 1, \ldots, m(z_j^*),\ z_k \in U_{\varepsilon(z_j^*)}(z_j^*),\ z \in S \right\} < \infty \,,$$

wobei $\prod_{k=1}^{0} \ldots := 1$ vereinbart sei. Wir definieren

$$m_0 := \max \left\{ m(z_j^*) : j = 1, \ldots, N \right\} , \quad \beta := \max \left\{ \alpha(z_j^*) : j = 1, \ldots, N \right\} , \quad m := m_0(K + N) \,,$$

wobei $K \in \mathbb{N}$ und $\alpha := \beta^K M < 1$ mit $M = \prod_{j=1}^{N} M_j$.

Ist nun $z_1, \ldots, z_m \in E$ ein System von Punkten aus E , so verteilen wir diese auf die Umgebungen $U_{\varepsilon(z_j^*)}(z_j^*)$, sagen wir $k_j \geq 0$ Stück auf $U_{\varepsilon(z_j^*)}(z_j^*)$:

$$z_k^j \in U_{\varepsilon(z_j^*)}(z_j^*) \,,\ k = 1, \ldots, k_j \,,\ k_1 + \ldots + k_N = m \,,$$

so dass $\left\{ z_k^j : k = 1, \ldots, k_j,\ j = 1, \ldots, N \right\} = \{ z_j : j = 1, \ldots, m \}$. Mit $k_j = \ell_j m(z_j^*) + n_j$, $\ell_j \in \mathbb{N}_0$ und $0 \leq n_j < m(z_j^*)$ folgt für $z \in S$ und $j = 1, \ldots, N$

$$\prod_{k=1}^{k_j} \left| \frac{z - w_{k \bmod m(z_j^*)}(z_j^*)}{z - z_k^j} \right| = \prod_{i=1}^{\ell_j} \left(\prod_{k=1}^{m(z_j^*)} \left| \frac{z - w_k(z_j^*)}{z - z^j_{k+(i-1)m(z_j^*)}} \right| \right) \prod_{k=1}^{n_j} \left| \frac{z - w_k(z_j^*)}{z - z^j_{k+\ell_j m(z_j^*)}} \right| \leq \alpha(z_j^*)^{\ell_j} M_j \,.$$

Wir erhalten

$$\prod_{j=1}^{N} \prod_{k=1}^{k_j} \left| \frac{z - w_{k \bmod m(z_j^*)}(z_j^*)}{z - z_k^j} \right| \leq \beta^{\ell_1 + \ldots + \ell_N} \prod_{j=1}^{N} M_j \leq \beta^K M = \alpha \,,$$

weil wegen

$$m = m_0(K + N) = \sum_{k=1}^{N} \left[\ell_j m(z_j^*) + n_j \right] \leq m_0(\ell_1 + \ldots + \ell_N + N)$$

die Ungleichung $\ell_1 + \ldots + \ell_N \geq K$ gilt. □

Satz 3.5 *Sei $E \subset \mathbb{C}$ abgeschlossen und $E \cap \mathrm{Pconv}(S) = \emptyset$. Dann existiert eine natürliche Zahl m_0 , so dass*

$$|\{ z \in E : P_n(z; \mu) = 0 \}| \leq m_0 \quad \forall\, n = 1, 2, \ldots \,,$$

d.h., die Anzahl der Nullstellen von $P_n(z; \mu)$, die in E liegen, ist gleichmäßig beschränkt.

Beweis. Da conv(S) kompakt ist, können wir nach Satz 3.2 annehmen, dass E kompakt ist. Aus Lemma 3.4 folgt die Existenz einer natürlichen Zahl $m \in \mathbb{N}$ und einer reellen Zahl $\alpha \in (0, 1)$, so dass für beliebige $z_1, ..., z_m \in E$ Zahlen $w_1, ..., w_m \in \mathbb{C}$ existieren mit

$$\prod_{k=1}^{m} \left| \frac{z - w_k}{z - z_k} \right| \leq \alpha < 1 \quad \forall\, z \in S \,.$$

Wären die $z_1, ..., z_m$ Nullstellen von $P_n(z)$, so wäre

$$Q_n(z) := P_n(z) \prod_{k=1}^{m} \frac{z - w_k}{z - z_k}$$

ein monisches Polynom vom Grade n mit $|Q_n(z)| \leq \alpha \, |P_n(z)| \quad \forall \, z \in S$, woraus

$$\int |Q_n|^2 \; d\mu < \int |P_n|^2 \; d\mu$$

im Widerspruch zu Satz 3.1 folgen würde. □

3.3 Asymptotik der Nullstellen

Wir definieren

$$\|v\|_S = \sup \{|v(z)| : z \in S(\mu)\}$$

und

$$t_n(S) := \min \{\|z^n + \cdots\|_S : z^n + \cdots \in \mathbb{C}_{n+1}[z]\} \; .$$

Das (eindeutig bestimmte) Polynom $T_n(z) = T_n(z;\mu) = z^n + \cdots \in \mathbb{C}_{n+1}[z]$ mit $t_n(S) = \|T_n\|_S$ heißt **Tschebyscheff-Polynom** (zu μ) n-ten Grades. Aus Satz 3.1 folgt

$$\frac{1}{\gamma_n} = \left(\int |P_n(z)|^2 \; d\mu \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int |T_n(z)|^2 \; d\mu \right)^{\frac{1}{2}} \leq [\mu(S)]^{\frac{1}{2}} \, t_n(S) \, .$$

Bemerkung Die Sätze 3.2 und 3.3 bleiben für die Nullstellen von $T_n(z)$ gültig, da sich die Beweise völlig analog führen lassen. Außerdem gilt $t_{m+n}(S) \leq t_m(S) \, t_n(S)$, woraus die Existenz von $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{t_n(S)}$ folgt.

Der Grenzwert $\operatorname{cheb}(S) := \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{t_n(S)}$ heißt **Tschebyscheff-Konstante** für S. Wegen $\gamma_n \geq \dfrac{1}{t_n(S)} \dfrac{1}{[\mu(S)]^{\frac{1}{2}}}$ folgt

$$\liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{\gamma_n} \geq \frac{1}{\operatorname{cheb}(S)} \, . \tag{3.1}$$

Das Maß μ heißt **vollständig regulär**, wenn

$$\lim_{n\to\infty} \|\widetilde{p}_n(z;\mu)\|_S^{\frac{1}{n}} = 1 \tag{3.2}$$

gilt.

Satz 3.6 *Ist das Maß μ vollständig regulär, so gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\gamma_n} = \frac{1}{\operatorname{cheb}(S)} \, .$$

Beweis. Es gilt nach Definition $t_n(S) = ||T_n||_S \leq ||P_n||_S = \frac{1}{\gamma_n} \, ||\widetilde{p}_n||_S$ und somit

$$\lim \; \sup \sqrt[n]{\gamma_n} \leq \limsup \sqrt[n]{\frac{||\widetilde{p}_n||_S}{t_n(S)}} \overset{(3.2)}{=} \frac{1}{\operatorname{cheb}(S)} \, ,$$

woraus mit (3.1) die Behauptung folgt. □

Im Folgenden gehen wir auf eine alternative Definition der Tschebyscheff-Konstante ein. Sei $E \subset \mathbb{C}$ kompakt, $\mathcal{M}(E)$ sei die Menge der positiven Borelmaße ν mit $S(\nu) \subset E$ und $\nu(E) = 1$. Für $\nu \in \mathcal{M}(E)$ definieren wir das **logarithmische Potential**

$$U^\nu(z) := \int \ln|z-t|^{-1}\, d\nu(t)$$

und die **Energie** dieses Potentials

$$I[\nu] := \int U^\nu\, d\nu = \int\int \ln|z-t|^{-1}\, d\nu(t)\, d\nu(z)\,.$$

Wir definieren $V(E) := \inf\{I[\nu] : \nu \in \mathcal{M}(E)\}$. Die Zahl $\mathrm{cap}(E) := e^{-V(E)}$ heißt **logarithmische Kapazität** von E.

Theorem 3.7 (elektrostatisches Problem) *Ist* $\mathrm{cap}(E) > 0$, *so existiert ein eindeutig bestimmtes Maß* $\nu_E \in \mathcal{M}(E)$ *mit* $I[\nu_E] = V(E)$.

Dieses Extremalmaß heißt **Gleichgewichtsverteilung** für E. Es gilt

(a) $S(\nu_E) \subset \partial_\infty E$, wobei $\partial_\infty E = \partial D_\infty(E)$ den **äußeren Rand** von E bezeichnet,

(b) $U^{\nu_E}(z) \le V(E)\ \forall\, z \in \mathbb{C}$,

(c) $\mathrm{cap}(E) = \mathrm{cheb}(E)$.

In (a) gilt zusätzlich $\mathrm{cap}(\partial_\infty E \setminus S(\nu_E)) = 0$, und in (b) gilt das Gleichheitszeichen für alle $z \in E$ mit evtl. Ausnahme einer Menge der Kapazität 0.

Im Weiteren setzen wir voraus, dass der äußere Rand $\partial_\infty E$ aus endlich vielen analytischen Bögen besteht. Die **Green'sche Funktion** $g_E(z)$ für $D_\infty(E)$ mit Singularität im unendlich fernen Punkt ist durch folgende Bedingungen bestimmt:

- $g_E(z)$ ist harmonisch in $D_\infty(E) \setminus \{P_\infty\}$,
- $g_E(z) \longrightarrow 0$ für $z \longrightarrow \partial_\infty E,\ z \in D_\infty(E)$,
- $\exists\, \widehat{V} \in \mathbb{C} : \Big(g_E(z) - \ln|z|\Big) \longrightarrow \hat{V}$ für $|z| \longrightarrow \infty$.

Aus den Green'schen Formeln folgt

$$\widehat{V} - g_E(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{\partial_\infty E} \ln|z-t|^{-1}\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} g_E(t)\,|dt| = \int_{\partial_\infty E} \ln|z-t|^{-1}\, d\widehat{\nu}(t)\,,$$

wobei $\mathbf{n}$ die Normale an $\partial_\infty E$ bezeichnet, die in $D_\infty(E)$ hinein gerichtet ist, und

$$\partial\widehat{\nu} = \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} g_E(t)\,|dt|\,.$$

Satz 3.8 *Es gilt* $\widehat{V} = V(E)$, $\widehat{\nu} = \nu_E$ *und*

$$U^{\nu_E}(z) = V(E) - g_E(z) = \ln\frac{1}{\mathrm{cap}(E)} - g_E(z)\,.$$

Beispiel 3.9 *Für* $E = \{z \in \mathbb{C} : |z| = R\}$ *ist* $g_E(z) = \ln \left|\frac{z}{R}\right|$ *mit* $\widehat{V} = -\ln R$ *und somit* $\operatorname{cap}(E) = R = \operatorname{cheb}(E)$. *Auf* $\partial_\infty E = E$ *gilt* $|dt| = ds$ *und*

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} g(t) = \frac{1}{R},$$

also $d\nu_E = \dfrac{ds}{2\pi R}$.

Beispiel 3.10 *Im Fall* $E = [-1, 1]$ *erhält man* $\widehat{V} = -\ln \frac{1}{2}$, *d.h.* $\operatorname{cap}(E) = \operatorname{cheb}(E) = \frac{1}{2}$, *und*

$$d\nu_E = \frac{1}{\pi} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Für ein Polynom $Q(z)$ mit den Nullstellen $z_1, ..., z_k$,

$$Q(z) = a_0(z - z_1)^{m_1} ... (z - z_k)^{m_k}, \quad n = m_1 + ... + m_k,$$

und eine Menge $A \subset \mathbb{C}$ definieren wir

$$\nu^Q(A) = \frac{1}{n} \sum_{1 \le j \le k : z_j \in A} m_j .$$

Satz 3.11 *Sei* $E \subset \mathbb{C}$ *kompakt mit positiver Kapazität. Die monischen Polynome* $Q_n(z) = z^n + \cdots \in \mathbb{C}_{n+1}[z]$ *mögen den Bedingungen*

(a) $\limsup_{n\to\infty} \|Q_n\|_E^{\frac{1}{n}} \le \operatorname{cap}(E)$,

(b) $\lim_{n\to\infty} \nu^{Q_n}(A) = 0$ *für alle abgeschlossenen Mengen* $A \subset \operatorname{int} \operatorname{Pconv}(E)$

genügen. Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} \int f \, d\nu^{Q_n} = \int f \, d\nu_E \tag{3.3}$$

für alle stetigen Funktionen $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ *mit kompaktem Träger.*

Die Bedingung (a) bedeutet, dass die Q_n asymptotisch minimal in der ∞-Norm sind (vgl. die Definition von $\operatorname{cheb}(S)$ und Aussage (c) nach Satz 3.7). Die Bedingung (b) besagt, dass die Zahl der Nullstellen von $Q_n(z)$, die in einer abgeschlossenen Menge $A \subset \operatorname{int}\operatorname{Pconv}(S)$ liegen, multipliziert mit $\frac{1}{n}$, für $n \longrightarrow \infty$ gegen Null konvergiert.

Satz 3.12 *Sei* μ *ein vollständig reguläres Maß, und* $S(\mu)$ *besitze positive Kapazität. Ferner sei* $\operatorname{int}\operatorname{Pconv}(S(\mu)) = \emptyset$. *Dann gilt* $\nu^{P_n(.,\mu)} \longrightarrow \nu_{S(\mu)}$ *im Sinne von* (3.3).

Beweis. Wir wenden Satz 3.11 an:

Die Bedingung (a) ist für $Q_n = P_n(., \mu)$ erfüllt, weil nach Satz 3.6 gilt nämlich:

$$\lim_{n\to\infty} \sup ||P_n||_{S(\mu)}^{\frac{1}{n}} \le \frac{\limsup ||\widetilde{p}_n||_{S(\mu)}^{\frac{1}{n}}}{\lim_{n\to\infty} \gamma_n^{\frac{1}{n}}} = \operatorname{cheb}(S) = \operatorname{cap}(S).$$

Die Bedingung (b) ist trivialerweise erfüllt. □

Satz 3.13 *Es gelte* $S(\mu) \subset \mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ *und* $\limsup_{n\to\infty} |P_n(0;\mu)|^{\frac{1}{n}} = \rho \leq 1$. *Ferner sei* $\mathbb{N}' \subset \mathbb{N}$ *eine unendliche Teilmenge von* $\mathbb{N}$ *mit* $\lim_{n\to\infty, n\in\mathbb{N}'} |P_n(0;\mu)|^{\frac{1}{n}} = \rho$. *Im Sinne von* (3.3) *gilt dann*

(a) *für* $0 < \varrho < 1$ *die Konvergenz* $\nu^{P_n} \overset{n\in\mathbb{N}'}{\longrightarrow} \dfrac{ds}{2\pi\rho}$,

(b) *für* $\varrho = 1$ *die Konvergenz* $\nu^{P_n} \overset{n\in\mathbb{N}'}{\longrightarrow} \dfrac{ds}{2\pi}$, *falls* $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} |P_k(0;\mu)| = 0$.

Das Grenzmaß ist also die Gleichgewichtsverteilung zu $E = \{z \in \mathbb{C} : |z| = \rho\}$.

Zur Bestimmung von ρ kann man die folgende Aussage verwenden: Ist $d\mu(e^{\mathbf{i}s}) = \left|D(e^{\mathbf{i}s})\right|^2 ds$ f.ü. auf $[0, 2\pi]$, wobei $D(z)$ in $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ holomorph ist, so ist ρ die kleinste Zahl, für die $\dfrac{1}{D(z)}$ in $\left\{z \in \mathbb{C} : |z| < \frac{1}{\rho}\right\}$ holomorph ist.

Beispiel 3.14 *Für*

$$d\mu(e^{\mathbf{i}s}) = \left|\sin\frac{s}{2}\right|^4 ds = \frac{1}{16}\left|(1 - e^{\mathbf{i}s})^2\right|^2 ds\,, \quad 0 \leq s \leq 2\pi\,,$$

ist also $D(z) = \frac{1}{4}(1 - z)^2$ *und wir erhalten* $\rho = 1$. *Für*

$$d\mu(e^{\mathbf{i}s}) = \left(\frac{5}{4} - \cos s\right) ds = \left|1 - \frac{1}{2}\, e^{\mathbf{i}s}\right|^2 ds\,, \quad 0 \leq s \leq 2\pi\,,$$

ist $D(z) = 1 - \frac{1}{2}z$, *so dass* $\rho = \frac{1}{2}$.

Kapitel 4

Kettenbrüche und orthogonale Polynome

4.1 Grundlagen

Unter einem (unendlichen) **Kettenbruch** versteht man ein Tripel $\left((a_n)_{n=1}^{\infty}, (b_n)_{n=0}^{\infty}, (c_n)_{n=0}^{\infty}\right)$ von Zahlenfolgen, wobei

$$
\begin{aligned}
c_0 &= b_0 \\
c_1 &= b_0 + \frac{a_1}{b_1} \\
c_2 &= b_0 + \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2}} \\
&\vdots \\
c_n &= b_0 + \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \ddots + \cfrac{a_n}{b_n}}}
\end{aligned}
$$

Die Zahl c_n nennt man den n-ten **Näherungsbruch** des unendlichen Kettenbruches

$$
b_0 + \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \ddots + \cfrac{a_n}{b_n + \ddots}}} \tag{4.1}
$$

Für c_n schreiben wir im Weiteren kurz

$$
c_n = b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} + \cdots + \frac{a_n|}{|b_n}
$$

und für (4.1)

$$b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} + \cdots + \frac{a_n|}{|b_n} + \cdots$$

Ist $a_k = -d_k$, so schreiben wir $-\frac{d_k|}{|b_k}$ anstelle von $+\frac{-d_k|}{|b_k}$.

Definition 4.1 *Wir sagen, dass der Kettenbruch (4.1) gegen K* **konvergiert**, *wenn höchstens endlich viele Näherungsbrüche c_n nicht definiert sind und wenn*

$$\lim_{n\to\infty} c_n = K$$

gilt. Wir schreiben dann auch

$$b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} + \cdots + \frac{a_n|}{|b_n} + \cdots = K\,.$$

Wir können c_n in der Form

$$c_n = \frac{A_n}{B_n}\,, \quad n = 0, 1, 2, \ldots\,,$$

schreiben, wobei z.B.

$$A_0 = b_0\,, \quad B_0 = 1\,,$$

$$A_1 = b_0 b_1 + a_1\,, \quad B_1 = b_1\,,$$

$$A_2 = b_0 b_1 b_2 + b_0 a_2 + a_1 b_2\,, \quad B_2 = b_1 b_2 + a_2\,.$$

Allgemein kann man die Folgen $(A_n)_{n=0}^{\infty}$ und $(B_n)_{n=0}^{\infty}$ so definieren, dass

$$A_n = b_n A_{n-1} + a_n A_{n-2}\,,\ n = 1, 2, \ldots\,, \quad A_{-1} = 1\,,\ A_0 = b_0\,, \tag{4.2}$$

und

$$B_n = b_n B_{n-1} + a_n B_{n-2}\,,\ n = 1, 2, \ldots\,, \quad B_{-1} = 0\,,\ B_0 = 1\,, \tag{4.3}$$

gilt. Den Beweis kann man mittels vollständiger Induktion führen.

Induktionsanfang:

$$A_1 = b_1 A_0 + a_1 A_{-1} = b_1 b_0 + a_1 \quad B_1 = b_1 B_0 + a_1 B_{-1} = b_1$$

$$A_2 = b_2 A_1 + a_2 A_0 = b_2(b_1 b_0 + a_1) + a_2 b_0\,, \quad B_2 = b_2 B_1 + a_2 B_0 = b_2 b_1 + a_2\,.$$

Schluss von n auf $n+1$: Es ist

$$c_{n+1} = b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} + \cdots + \frac{a_n|}{|b_n} + \frac{a_{n+1}|}{|b_{n+1}} = b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \cdots + \frac{a_n|}{\left|b_n + \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}\right.}\,,$$

also

$$c_{n+1} = \frac{\widetilde{A}_n}{\widetilde{B}_n}$$

mit

$$\begin{aligned}\widetilde{A}_n &= \left(b_n + \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}\right) A_{n-1} + a_n A_{n-2} \\ &= \frac{(b_n b_{n+1} + a_{n+1})A_{n-1} + b_{n+1} a_n A_{n-2}}{b_{n+1}} \\ &= \frac{b_{n+1}(b_n A_{n-1} + a_n A_{n-2}) + a_{n+1} A_{n-1}}{b_{n+1}} \\ &= \frac{b_{n+1} A_n + a_{n+1} A_{n-1}}{b_{n+1}}\end{aligned}$$

und analog

$$\widetilde{B}_n = \frac{b_{n+1} B_n + a_{n+1} B_{n-1}}{b_{n+1}}\,.$$

Die Zahlen A_n und B_n nennt man den n-ten **partiellen Zähler** bzw. **Nenner** des Kettenbruches (4.1). Wir haben

$$\begin{aligned}A_n B_{n-1} - B_n A_{n-1} &= (b_n - A_{n-1} + a_n A_{n-2})B_{n-1} - (b_n B_{n-1} + a_n B_{n-2})A_{n-1} \\ &= -a_n (A_{n-1} B_{n-2} - B_{n-1} A_{n-2}) \\ &= (-1)^2 a_n a_{n-1} (A_{n-2} B_{n-3} - B_{n-2} A_{n-3}) \\ &= (-1)^n a_n \cdots a_1 (A_0 B_{-1} - B_0 A_{-1}) \\ &= (-1)^{n+1} a_n a_{n-1} \cdots a_1\,.\end{aligned}$$

Somit gilt die Formel

$$A_n B_{n-1} - A_{n-1} B_n = (-1)^{n+1} a_1 a_2 \cdots a_n\,, \quad n = 1, 2, \ldots\,, \tag{4.4}$$

Setzen wir $B_k \neq 0$, $k = 1, \ldots, n$, voraus, so folgt

$$\frac{A_n}{B_n} - \frac{A_{n-1}}{B_{n-1}} = \frac{A_n B_{n-1} A_{n-1} B_n}{B_{n-1} B_n} = \frac{(-1)^{n+1} a_1 a_2 \cdots a_n}{B_{n-1} B_n}$$

sowie $\dfrac{A_0}{B_0} = b_0$, also

$$\frac{A_n}{B_n} = b_0 + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1} a_1 a_2 \cdots a_k}{B_{k-1} B_k}\,. \tag{4.5}$$

Lemma 4.2 *Ist $m_0 = 0$, so ist der n-te partielle Nenner des Kettenbruches*

$$1 - \frac{1|}{|1} - \frac{(1-m_0)m_1|}{|1} - \frac{(1-m_1)m_2|}{|1} - \cdots$$

gleich

$$B_n = (1-m_0)(1-m_1)\cdots(1-m_{n-1})\,, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{4.6}$$

Beweis. Es ist $B_1 = b_1 = 1$. Aus (4.3) folgt

$$\begin{aligned}B_{n+1} &= B_n - (1-m_{n-1}) m_n B_{n-1} \\ &= (1-m_0)(1-m_1)\cdots(1-m_{n-1}) - (1-m_{n-1}) m_n (1-m_0)\cdots(1-m_{n-2}) \\ &= (1-m_0)\cdots(1-m_{n-1})(1-m_n)\,.\end{aligned}$$

□

Lemma 4.3 *Es seien* $a_n = (1-m_{n-1})m_n$, $m_0 = 0$ *und* $0 < m_n < 1$, $n \in \mathbb{N}$. *Dann folgt*

$$1 - \frac{a_1|}{|1} - \frac{a_2|}{|1} - \frac{a_3|}{|1} - \cdots = \frac{1}{1+L}\,,$$

wobei

$$L = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m_1 m_2 \cdots m_n}{(1-m_1)(1-m_2)\cdots(1-m_n)}\,.$$

Beweis. Mit $c_n = \dfrac{A_n}{B_n}$ und

$$\frac{\widetilde{A}_{n+1}}{\widetilde{B}_{n+1}} := 1 - \frac{1}{\frac{A_n}{B_n}} = 1 - \frac{1|}{|1} - \frac{a_1|}{|1} - \cdots - \frac{a_n|}{|1}$$

folgt aus Lemma 4.2

$$\widetilde{B}_{n+1} = (1-m_0)\cdots(1-m_n) > 0$$

und aus (4.5) mit $a_0 = 1$

$$\begin{aligned} \frac{\widetilde{A}_{n+1}}{\widetilde{B}_{n+1}} &= 1 + \sum_{k=}^{n} \frac{(-1)^k(-1)(-a_1)\cdots(-a_k)}{\overline{B}_k \overline{B}_{k+1}} \\ &= 1 - \sum_{k=0}^{n} \frac{a_0 a_1 a_2 \cdots a_k}{(1-m_0)^2 \cdots (1-m_{k-1})^2 (1-m_k)} \\ &= -\sum_{k=1}^{n} \frac{m_1 \cdots m_k}{(1-m_1)\cdots(1-m_k)}\,. \end{aligned}$$

Es folgt

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1 - \frac{\widetilde{A}_{n+1}}{\widetilde{B}_{n+1}}} = \frac{1}{1+L}\,.$$

□

Satz 4.4 *Es seien* $b_n = (1-m_{n-1})m_n$, $0 \le m_0 < 1$ *und* $0 < m_n < 1$, $n = 1, 2, \ldots$ *Dann gilt*

$$1 - \frac{b_1|}{|1} - \frac{b_2|}{|1} - \frac{b_3|}{|1} - \cdots = m_0 + \frac{1-m_0}{1+G}\,, \tag{4.7}$$

wobei

$$G = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m_1 m_2 \cdots m_n}{(1-m_1)(1-m_2)\cdots(1-m_n)}\,.$$

Beweis. Im Fall $m_0 = 0$ ist die Behauptung äquivalent zu Lemma 4.3. Sei also $0 < m_0 < 1$. Aus Lemma 4.2 folgt

$$1 - \frac{m_0|}{|1} - \frac{b_1|}{|1} - \frac{b_2|}{|1} - \cdots = \frac{1}{1+K} = 1 - \frac{m_0}{1 - \frac{b_1|}{|1} - \cdots}$$

mit

$$K = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m_0 m_1 \cdots m_{n-1}}{(1-m_0)(1-m_1)\cdots(1-m_{n-1})} = \frac{m_0}{1-m_0}(1+G)\,.$$

Hieraus ergibt sich

$$\begin{aligned} 1 - \frac{b_1|}{|1} - \cdots &= \frac{m_0}{1 - \dfrac{1}{1+K}} = m_0 \frac{1+K}{K} = m_0(1+K^{-1}) \\ &= m_0\left(1 + \frac{1-m_0}{m_0}\,\frac{1}{1+G}\right) = m_0 + \frac{1-m_0}{1+G}\,. \end{aligned}$$

□

Beispiel 4.5 *Aus*

$$b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} + \frac{a_3|}{|b_3} + \cdots = K \neq 0$$

folgt die Beziehung

$$b_{-1} + \frac{a_0|}{|b_0} + \frac{a_2|}{|b_2} + \frac{a_3|}{|b_3} + \cdots = b_{-1} + \frac{a_0}{K}\,.$$

Beweis. Wir setzen

$$\widetilde{c}_n = b_{-1} + \frac{a_0|}{|b_0} + \ldots + \frac{a_n|}{|b_n}\,.$$

Es folgt $\widetilde{c}_n = b_{-1} + \dfrac{a_0}{c_n}$ und somit die Behauptung. □

Beispiel 4.6 *Nehmen wir an, dass der Kettenbruch*

$$1 + \frac{1|}{|1} + \frac{1|}{|1} + \frac{1|}{|1} + \cdots$$

konvergiert, so ist sein Wert gleich $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Beweis. Wir haben $c_n = 1 + \dfrac{1}{c_{n-1}}$ und $c_n \longrightarrow c$. Es folgt $c = 1 + \dfrac{1}{c}$, also $c^2 - c + 1 = 0$, woraus sich $c = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{5}}{2}$ ergibt, weil $c < 0$ nicht möglich ist. □

4.2 Jacobi-Brüche und orthogonale Polynome

Es seien α_n und β_n gegebene Zahlen mit $\beta_n \neq 0$. Für den n-ten partiellen Nenner des sogenannten **Jacobi-Bruches**

$$\frac{\beta_0|}{|x-\alpha_0} - \frac{\beta_1|}{|x-\alpha_1} - \frac{\beta_2|}{|x-\alpha_2} - \cdots \tag{4.8}$$

schreiben wir $P_n(x)$. Nach Formel (4.3) gilt dann

$$P_{n+1}(x) = (x - \alpha_n)P_n(x) - \beta_n P_{n-1}(x)\,, \quad n = 0,1,2,\ldots\,, \quad P_0(x) = 1\,,\ P_{-1}(x) = 0\,. \tag{4.9}$$

Der n-te partielle Zähler $A_n(x)$ genügt der Rekursionsformel

$$A_{n+1}(x) = (x - \alpha_n)A_n(x) - \beta_n A_{n-1}(x) \quad n = 1,2,\ldots\,, \quad A_1(x) = \beta_0\,,\ A_0(x) = 0\,.$$

Dabei ist $\beta_0^{-1}A_n(x)$ ein monisches Polynom vom Grade $n-1$, welches unabhängig von β_0 ist. Wir schreiben deshalb $Q_n(x) = \beta_0^{-1}A_{n+1}(x)$, $n = -1,0,1,\ldots$ Es gilt dann

$$Q_{n+1}(x) = (x - \alpha_{n+1})Q_n(x) - \beta_{n+1}Q_{n-1}\,, \quad n = 0,1,2,\ldots\,, \quad Q_0(x) = 1\,,\ Q_{-1}(x) = 0\,. \tag{4.10}$$

Die Polynome $Q_n(x)$ nennt man die **monischen Zählerpolynome** bezüglich des Polynomsystems $(P_n(x))_{n=0}^{\infty}$. Aus (4.4) folgt

$$P_{n+1}(x)Q_{n-1}(x) - P_n(x)Q_n(x) = -\beta_1\beta_2\cdots\beta_n\,, \quad n = 1,2,\ldots \tag{4.11}$$

Satz 4.7 *Gilt $\alpha_n \in \mathbb{R}$ und $\beta_n > 0$, so genügen die Nullstellen x_{nk} und y_{nk} der Polynome $P_n(x)$ und $Q_n(x)$ den Beziehungen*

$$x_{n+1,k+1} < y_{nk} < x_{n+1,k}\,.$$

Folgerung 4.8 *Sind (η_1,ξ_1) und (η_1^1,ξ_1^1) die Träger der OPS*

$$(P_n(x))_{n=0}^{\infty} \quad \text{und} \quad (Q_n(x))_{n=0}^{\infty}\,,$$

so gilt $(\eta_1^1,\xi_1^1) \subset (\eta_1,\xi_1)$. Ferner folgt z.B. aus $\xi_1^1 < \xi_1$, dass $P_n(x)$ für alle hinreichend großen n im Intervall (ξ_1^1,ξ_1) genau eine Nullstelle hat.

Satz 4.9 *Sind die α_n reell und die β_n positiv, so gilt*

$$\frac{\beta_0 Q_{n-1}(x)}{P_n(x)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{A_{nk}}{x - x_{nk}}\,,$$

wobei A_{nk} die Gewichte in der Gauß'schen Quadraturformel zum OPS $(P_n(x))_{n=0}^{\infty}$ bezeichnen.

Beispiel 4.10 *Die monischen Tschebyscheff-Polynome zweiter Art $\widehat{U}_n(x) = \dfrac{2^{-n}\sin[(n+1)\theta]}{\sin\theta}$, $n \in \mathbb{N}_0$ (vgl. Abschnitt 1.4, Aufgabe 2, $x = \cos\theta$) sind die Zählerpolynome für die monischen Tschebyscheff-Polynome erster Art $\widehat{T}_n(x) = 2^{1-n}\cos(n\theta)$, $n \in \mathbb{N}$ und $\widehat{T}_0(x) = 1$ (vgl. die Formeln (1.6)-(1.10)). Unter Verwednung von Satz 4.9 erhalten wir für die Gauß'sche Quadraturformel zum Tschebyscheff-Gewicht erster Art*

$$\int_{-1}^{1} \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{1-x^2}} \approx \frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\cos\frac{2k-1}{2n}\pi\right)\,.$$

4.3 Kettenfolgen

Definition 4.11 *Eine Folge* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *der Gestalt*

$$a_n = (1 - g_{n-1})g_n \quad \textit{mit} \quad 0 \le g_0 < 1 \quad \textit{und} \quad 0 < g_n < 1\,,\ n = 1, 2, \dots\,,$$

heißt **Kettenfolge***. Dabei nennt man* $(g_n)_{n=0}^{\infty}$ *eine* **Parameterfolge** *und* g_0 *einen* **Anfangsparameter** *der Kettenfolge* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$.

Beispiel 4.12 *Die konstante Folge* $\left(\frac{1}{4}\right)_{n=1}^{\infty}$ *ist Kettenfolge, wobei sowohl* $\left(\frac{n}{2(n+1)}\right)_{n=0}^{\infty}$ *als auch die konstante Folge* $\left(\frac{1}{2}\right)_{n=0}^{\infty}$ *Parameterfolgen sind. Die Gleichungen*

$$a = \left(1 - \frac{1-\sqrt{1-4a}}{2}\right)\frac{1-\sqrt{1-4a}}{2} = \left(1 - \frac{1+\sqrt{1-4a}}{2}\right)\frac{1+\sqrt{1-4a}}{2}$$

zeigen, dass jede konstante Folge $(a)_{n=1}^{\infty}$ *mit* $0 < a \le \frac{1}{4}$ *eine Kettenfolge ist.*

Lemma 4.13 *Es seien* $(g_n)_{n=0}^{\infty}$ *und* $(h_n)_{n=0}^{\infty}$ *Parameterfolgen der Kettenfolge* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *. Dann gilt* $g_n < h_n$, $n = 1, 2, \dots$, *genau dann, wenn* $g_0 < h_0$ *ist.*

Lemma 4.14 *Hat eine Kettenfolge* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *die Parameterfolge* $(g_n)_{n=0}^{\infty}$ *mit* $g_0 > 0$, *so hat* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *zu jedem* $h_0 \in [0, g_0]$ *eine Parameterfolge* $(h_n)_{n=0}^{\infty}$.

Folgerung 4.15 *Jede Kettenfolge besitzt eine Parameterfolge* $(m_n)_{n=0}^{\infty}$ *mit* $m_0 = 0$ *. Dabei gilt* $m_n < g_n$, $n = 0, 1, 2, \dots$, *für jede andere Parameterfolge* $(g_n)_{n=0}^{\infty}$ *dieser Kettenfolge. Die Folge* $(m_n)_{n=1}^{\infty}$ *nennt man die* **minimale Parameterfolge** *der entsprechenden Kettenfolge. Eine Parameterfolge* $(M_n)_{n=0}^{\infty}$ *, für die* $M_n \ge g_n$, $n = 0, 1, 2, \dots$, *für jede Parameterfolge* $(g_n)_{n=0}^{\infty}$ *gilt, nennt man* **maximale Parameterfolge** *der entsprechenden Kettenfolge.*

Lemma 4.16 *Jede Kettenfolge besitzt eine maximale Parameterfolge.*

Im Weiteren seien mit $(m_n)_{n=0}^{\infty}$ die minimale und mit $(M_n)_{n=0}^{\infty}$ die maximale Parameterfolge der Kettenfolge $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ bezeichnet.

Satz 4.17 *Ist* $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ *eine Kettenfolge mit der Parameterfolge* $(h_n)_{n=0}^{\infty}$ *und mit der Eigenschaft* $a_n \le b_n$, $n = 1, 2, \dots$, *so gilt*

$$m_n \le h_n \le M_n\,, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Lemma 4.18 *Ist die Kettenfolge* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *monoton nicht fallend, so sind die minimale Parameterfolge* $(m_n)_{n=0}^{\infty}$ *monoton wachsend und die maximale Parameterfolge* $(M_n)_{n=0}^{\infty}$ *monoton nicht wachsend.*

Folgerung 4.19 *Für* $(a_n)_{n=1}^\infty = \left(\frac{1}{4}\right)_{n=1}^\infty$ *ist* $(M_n)_{n=0}^\infty = \left(\frac{1}{2}\right)_{n=0}^\infty$.

Folgerung 4.20 *Ist* $(a_n)_{n=1}^\infty$ *eine Kettenfolge und existiert ein* $N \in \mathbb{N}$, *so dass* $a_n \geq \frac{1}{4}$, $n = N, N+1, \ldots$, *so folgt* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{4}$. *Ist also* $b_n \geq b > \frac{1}{4}$, $n = N, N+1, \ldots$, *so ist* $(b_n)_{n=1}^\infty$ ***keine*** *Kettenfolge.*

Satz 4.21 (Vergleichstest) *Ist* $(a_n)_{n=1}^\infty$ *eine Kettenfolge und gilt* $0 < c_n \leq a_n$, $n = 1, 2, \ldots$, *so ist auch* $(c_n)_{n=1}^\infty$ *eine Kettenfolge.*

Lemma 4.22 *Ist* $(a_n)_{n=1}^\infty$ *eine Kettenfolge, so gilt*

$$\sum_{k=1}^n \left(\sqrt{a_k} - \frac{1}{2}\right) < \frac{m_n}{2}$$

und, falls $a_n \geq \frac{1}{4}$, $n = 1, 2, \ldots$,

$$0 \leq \sum_{k=1}^n \left(a_k - \frac{1}{4}\right) < \frac{3}{8}.$$

Folgerung 4.23 *Gilt* $b_n \geq \frac{1}{4}$, $n = N, N+1, \ldots$, *und* $\sum\limits_{n=N}^\infty \left(b_n - \frac{1}{4}\right) = \infty$, *so ist* $(b_n)_{n=1}^\infty$ *keine Kettenfolge.*

Im Weiteren verwenden wir die Bezeichnungen $a_n^{(k)}$ für a_{n+k} und $(m_{kn})_{n=0}^\infty$ für die minimale Parameterfolge der Kettenfolge $\left(a_n^{(k)}\right)_{n=1}^\infty$. Nach Lemma 4.3 ist

$$1 - \frac{a_1^{(k)}|}{|1} - \frac{a_2^{(k)}|}{|1} - \frac{a_3^{(k)}|}{|1} - \cdots = \frac{1}{1+L_k} =: P_k\,, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{4.12}$$

wobei

$$L_k = \sum_{n=1}^\infty \frac{m_{k1} m_{k2} \cdots m_{kn}}{(1-m_{k1})(1-m_{k2})\cdots(1-m_{kn})}.$$

Offenbar gilt $0 \leq P_k < 1$ und

$$P_k = 1 - \frac{a_{k+1}}{P_{k+1}},$$

so dass $P_{k+1} \neq 0$ und

$$a_{k+1} = (1-P_k)P_{k+1}\,, \quad 0 \leq P_0 < 1\,, \quad 0 < P_{k+1} < 1\,,\ k = 0, 1, 2, \ldots$$

Satz 4.24 *Die in* (4.12) *definierte Folge* $(P_n)_{n=0}^\infty$ *ist die maximale Parameterfolge zu* $(a_n)_{n=1}^\infty$.

Folgerung 4.25 *Die Parameterfolge* $(g_n)_{n=0}^{\infty}$ *zur Kettenfolge* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *ist genau dann deren maximale Parameterfolge, wenn*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{g_1 g_2 \cdots g_n}{(1-g_1)(1-g_2)\cdots(1-g_n)} = \infty$$

gilt.

Satz 4.26 *Ist* $(g_n)_{n=0}^{\infty}$ *irgendeine, nicht maximale Parameterfolge zu* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *, so gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{m_n}{g_n} = 1\,.$$

Folgerung 4.27 *Falls* $a_n = a$ *,* $n = 1, 2, \ldots$ *, und* $0 < a \leq \frac{1}{4}$ *, so*

$$\lim_{n\to\infty} m_n = \frac{1}{2}\left(1-\sqrt{1-4a}\right) \quad und \quad M_n = \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{1-4a}\right)\,.$$

Satz 4.28 *Sei* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *Kettenfolge mit* $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ *. Dann gilt* $0 \leq a \leq \frac{1}{4}$ *und*

$$\lim_{n\to\infty} M_n = \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{1-4a}\right)\,.$$

Ist außerdem $M_0 \neq 0$ *, so ist*

$$\lim_{n\to\infty} m_n = \frac{1}{2}\left(1-\sqrt{1-4a}\right)\,.$$

4.4 Kettenfolgen und orthogonale Polynome

$(P_n(x))_{n=0}^{\infty}$ sei das monische OPS zu dem positiv definiten Momentenfunktional $\mathcal{L}$ und genüge der Rekursionsformel (4.9). Mit (η_1, ξ_1) sei der Träger von $\mathcal{L}$ bezeichnet. Für ein fest gewähltes $s \in \mathbb{R}$ definieren wir

$$\gamma_n(x) = \frac{\beta_n}{(\alpha_{n-1}-x)(\alpha_n - x)}\,, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Satz 4.29 *Es gilt* $\eta_1 \geq s$ *genau dann, wenn* $\alpha_n > s$ *,* $n = 0, 1, 2, \ldots$ *, gilt und wenn* $(\gamma_n(s))_{n=1}^{\infty}$ *eine Kettenfolge ist.*

Mit den folgenden Überlegungen und Lemmata bereiten wir den Beweis von Satz 4.29 vor.

Lemma 4.30 *Es seien* $\mathcal{M}$ *und* $\mathcal{L}$ *Momentenfunktionale mit*

$$\mathcal{M}[x^{2m}] = \mathcal{L}[x^m] \quad und \quad \mathcal{M}[x^{2m+1}] = 0\,, \qquad m \in \mathbb{N}_0\,.$$

Ferner seien $S_{2m}(x) = P_m(x^2)$ *und* $S_{2m+1}(x) = xQ_m(x^2)$ *. Dann ist* $(S_n)_{n=0}^{\infty}$ *genau dann das monische OPS zu* $\mathcal{M}$ *, wenn* $(P_n)_{n=0}^{\infty}$ *das monische OPS zu* $\mathcal{L}$ *und* $(Q_n)_{n=0}^{\infty}$ *das monische OPS zu* $\mathcal{L}_0^*$ *(vgl. Abschnitt 2.4) sind. Außerdem ist* $\mathcal{M}$ *genau dann positiv definit, wenn* $\mathcal{L}$ *auf* $(0,\infty)$ *positiv definit ist, wobei in diesem Fall*

$$(\eta_1^{\mathcal{M}}, \xi_1^{\mathcal{M}}) = (-\zeta, \zeta) \quad und \quad \eta_1^{\mathcal{L}} \geq 0,\ \xi_1^{\mathcal{L}} = \zeta^2$$

mit einem $\zeta > 0$ *gilt.*

Wir betrachten nun die Rekursionsformeln

$$\begin{aligned} P_{n+1}(x) &= (x-\alpha_n)P_n(x) - \beta_n P_{n-1}(x)\,, \quad P_{-1} \equiv 0,\, P_0 \equiv 1\,, \\ Q_{n+1}(x) &= (x-\gamma_n)Q_n(x) - \delta_n Q_{n-1}(x)\,, \quad Q_{-1} \equiv 0,\, Q_0 \equiv 1\,, \\ S_{n+1}(x) &= xS_n(x) - \varepsilon_n Q_{n-1}(x)\,, \quad S_{-1} \equiv 0,\, S_0 \equiv 1\,, \end{aligned}$$

$\beta_0 = \mathcal{L}[1]$, $\delta_0 = \mathcal{L}_0^*[1]$, $\varepsilon_0 = \mathcal{M}[1]$. Es folgt

$$\begin{aligned} Q_{m+1}(x) &= (x-\varepsilon_{2m+1}-\varepsilon_{2m+2})Q_m(x) - \varepsilon_{2m}\varepsilon_{2m+1}Q_{m-1}(x)\,, \quad m \in \mathbb{N}_0\,, \\ P_{m+1}(x) &= (x-\varepsilon_{2m}-\varepsilon_{2m+1})P_m(x) - \varepsilon_{2m-1}\varepsilon_{2m}P_{m-1}(x)\,, \quad m \in \mathbb{N}\,, \\ P_1(x) &= (x-\varepsilon_1)P_0(x)\,. \end{aligned}$$

Lemma 4.31 *Die Momentenfunktionale* $\mathcal{L}$, $\mathcal{L}_0^*$ *und* $\mathcal{M}$ *sind genau dann positiv definit, wenn* $\varepsilon_n > 0\ \forall\, n \in \mathbb{N}_0$ *gilt.*

Lemma 4.32 *Gegeben seien*

$$R_{n+1}(x) = (x-\alpha_n')R_n(x) - \beta_n' R_{n-1}(x)\,, \quad n \in \mathbb{N}_0\,,\ R_{-1} \equiv 0\,,\ R_0 \equiv 1\,,$$

mit $\beta_0' > 0$ *und* $\beta_n' \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$, *sowie das zugehörige Momentenfunktional* $\mathcal{N}$. *Dann gilt:*

(a) *Das Momentenfunktional* $\mathcal{N}$ *ist genau dann positiv definit auf* $(0,\infty)$, *wenn eine Zahlenfolge* $(\delta_n')_{n=0}^{\infty}$ *mit den Eigenschaften*

$$\delta_0' \geq 0,\ \delta_n' > 0,\, n \in \mathbb{N}, \quad \alpha_n' = \delta_{2n}' + \delta_{2n+1}',\, n \in \mathbb{N}_0, \quad \beta_n' = \delta_{2n-1}'\delta_{2n}',\, n \in \mathbb{N}$$

existiert.

(b) *Dabei gilt genau dann* $\delta_0' > 0$, *wenn ein positiv definites Momentenfunktional* $\mathcal{L}$ *existiert, so dass* $\mathcal{N} = \mathcal{L}_0^*$.

Lemma 4.33 *Unter den Voraussetzungen von Lemma 4.32 gilt:*

(a) *Das Momentenfunktional* $\mathcal{N}$ *ist genau dann auf* $(0,\infty)$ *positive definit, wenn* $\alpha_n' > 0$, $n \in \mathbb{N}_0$ *gilt und wenn eine Zahlenfolge* $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ *mit den Eigenschaften*

$$0 \leq g_0 < 1\,,\ 0 < g_n < 1\,,\ n \in \mathbb{N} \quad \textit{und} \quad \frac{\beta_n'}{\alpha_{n-1}'\alpha_n'} = (1-g_{n-1})g_n\,,\ n \in \mathbb{N}$$

existiert.

(b) *Dabei gilt* $\mathcal{N} = \mathcal{L}_0^*$ *mit einem auf* $(0,\infty)$ *positiv definiten Momentenfunktional* $\mathcal{L}$ *genau dann, wenn* $g_0 > 0$ *ist.*

Folgerung 4.34 *Es ist* $\xi_1 \leq t$ *genau dann, wenn* $\alpha_n < t$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, *gilt und wenn* $(\gamma_n(t))_{n=1}^{\infty}$ *eine Kettenfolge ist.*

Folgerung 4.35 *Es gilt* $\eta_1 < \alpha_n < \xi_1$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

Satz 4.36 *Der Träger* (η_1, ξ_1) *ist genau dann beschränkt, wenn sowohl* $(\alpha_n)_{n=0}^{\infty}$ *als auch* $(\beta_n)_{n=0}^{\infty}$ *beschränkte Folgen sind.*

Satz 4.37 *Es gilt* $(\eta_1, \xi_1) = (-\infty, \infty)$ *genau dann, wenn* $(\gamma_n(x))_{n=1}^{\infty}$ *für kein* $x \in \mathbb{R}$ *eine Kettenfolge ist.*

Somit ist jede der folgenden Bedingungen hinreichend dafür, dass $(\eta_1, \xi_1) = (-\infty, \infty)$ gilt:

(a) $\inf\{\alpha_n : n = 0, 1, 2, \ldots\} = -\infty$ und $\sup\{\alpha_n : n = 0, 1, 2, \ldots\} = +\infty$ (vgl. Folg. 4.35)

(b) $(\alpha_n)_{n=0}^{\infty}$ ist beschränkt und $(\beta_n)_{n=0}^{\infty}$ ist unbeschränkt, da dann die $\gamma_n(x)$ unbeschränkt sind für alle $x \in \mathbb{R}$

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = \infty$ und $\liminf\limits_{n\to\infty} \dfrac{\beta_n}{\alpha_{n-1}\alpha_n} > \dfrac{1}{4}$

Zu (c): Wegen

$$\frac{\beta_n}{(\alpha_{n-1} - x)(\alpha_n - x)} = \frac{\beta_n}{\alpha_{n-1}\alpha_n} \cdot \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_{n-1} - x} \cdot \frac{\alpha_n}{\alpha_n - x}$$

und Folg. 4.20 kann $(\gamma_n(x))_{n=1}^{\infty}$ für alle $x \in \mathbb{R}$ keine Kettenfolge sein.

Satz 4.38 *Es sei* $x \notin (\eta_1, \xi_1)$, *so dass* $(\gamma_n(x))_{n=1}^{\infty}$ *eine Kettenfolge ist. Dann ist die entsprechende minimale Parameterfolge* $(m_n(x))_{n=0}^{\infty}$ *gegeben durch*

$$m_n(x) = 1 - \frac{P_{n+1}(x)}{(x - \alpha_n)P_n(x)}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Mit $(\widetilde{p}_n(x))_{n=0}^{\infty}$ bezeichnen wir das ONPS zu $\mathcal{L}$, d.h.

$$\widetilde{p}_n(x) = (\beta_0 \cdots \beta_n)^{-\frac{1}{2}} P_n(x), \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Satz 4.39 *Ist* (η_1, ξ_1) *beschränkt, so gilt*

$$\lim_{n\to\infty} |p_n(x)| = \infty \quad \forall\, x \notin [\eta_1, \xi_1].$$

Kapitel 5

Belegungsfunktionen und das Darstellungstheorem

5.1 Vorbetrachtungen

Definition 5.1 *Eine beschränkte, nicht fallende Funktion* $\psi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *heißt* **Belegungsfunktion**, *wenn alle Momente*

$$\mu_n := \int_{-\infty}^{\infty} x^n \, d\psi(x) \,, \quad n = 0, 1, 2, \dots \,, \tag{5.1}$$

endlich sind. Die Menge

$$S(\psi) := \{x \in \mathbb{R} : \psi(x+\delta) - \psi(x-\delta) > 0 \ \forall\, \delta > 0\}$$

nennt man **Spektrum** *von* ψ . *Ein* $x \in S(\psi)$ *heißt* **Spektralpunkt** *von* ψ .

Das Spektrum einer Belegungsfunktion ist abgeschlossen. Besteht es aus unendlich vielen Punkten, so ist das durch $(\mu_n)_{n=1}^{\infty}$ (vgl. (5.1)) definierte Momentenfunktional positiv definit.

Lemma 5.2 *Es seien* E *eine abzählbare Menge und* $f_n : E \longrightarrow \mathbb{R}$ *eine Folge von Funktionen, so dass die Zahlenfolge* $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$ *für jedes* $x \in E$ *beschränkt ist. Dann existiert eine Teilfolge von* $(f_n)_{n=1}^{\infty}$, *die überall auf* E *konvergiert.*

Lemma 5.3 *Ist* $(\varphi_n)_{n=1}^{\infty}$ *eine Folge nicht fallender und gleichmäßig beschränkter Funktionen* $\varphi_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, *so existiert eine Teilfolge* $\left\{\varphi_{n_j}\right\}_{j=1}^{\infty}$, *so dass für jedes* $x \in \mathbb{R}$ *der Grenzwert* $\varphi(x) = \lim_{j\to\infty} \varphi_{n_j}(x)$ *existiert. Die Funktion* $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *ist beschränkt und nicht fallend.*

Lemma 5.4 *Die Funktionen* $\varphi_n : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \dots$, *seien nicht fallend und gleichmäßig beschränkt, wobei* $-\infty < a < b < \infty$ *und* $\varphi_n(x) \longrightarrow \varphi(x)$ *für alle* $x \in [a,b]$ *erfüllt sei. Dann gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f(x) \, d\varphi_n(x) = \int_a^b f(x) \, d\varphi(x) \quad \forall\, f \in \mathbf{C}[a,b] \,.$$

Die Beispiele

$$\varphi_n(x) = \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & : & x < n \\ 1 & : & x \geq n \end{array} \right\} \longrightarrow \varphi(x) = 0\,,\ x \in \mathbb{R}\,,$$

und

$$\varphi_n(x) = \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & : & x < 0\,, \\ \dfrac{x}{n} & : & 0 \leq x \leq n\,, \\ 1 & : & n < x\,, \end{array} \right\} \longrightarrow \varphi(x) = 0\,,\ x \in \mathbb{R}\,,$$

zeigen, dass man auf die Voraussetzung der Beschränkheit von $[a,b]$ in Lemma 5.4 nicht verzichten kann. Dabei ist im zweiten Beispiel das Spektrum aller φ_n unendlich.

5.2 Das Darstellungstheorem

Es sei $\mathcal{L}$ ein positiv definites Momentenfunktional. Dann gilt (vgl. Abschnitt 2.4)

$$\mu_k = \mathcal{L}[x^k] = \sum_{j=1}^{n} A_{nj} x_{nj}^k\,, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, 2n-1\,. \tag{5.2}$$

Wir definieren

$$\psi_n(x) = \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & : & x < x_{nn}\,, \\ A_{nn} + \cdots + A_{np} & : & x_{np} \leq x < x_{n,p-1}\,,\ n \geq p > 1\,, \\ \mu_0 & : & x_{n1} \leq x\,. \end{array} \right. \tag{5.3}$$

Dann gilt $S(\psi_n) = \{x_{nj} : j = 1, \ldots, n\}$, $\psi_n(x_{nj}+0) - \psi_n(x_{nj}-0) = A_{nj}$ und

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^k \, d\psi_n(x) = \sum_{j=1}^{n} A_{nj} x_{nj}^k = \mu_k\,, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, 2n-1\,. \tag{5.4}$$

Ist $[a,b]$ ein beschränktes Trägerintervall von $\mathcal{L}$, so folgt aus Lemma 5.3 und Lemma 5.4 die Existenz einer Teilfolge $\left\{\psi_{n_j}\right\}_{j=1}^{\infty}$ mit $\psi_{n_j}(x) \longrightarrow \psi(x)$, $x \in \mathbb{R}$, und

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^k \, d\psi(x) = \mu_k = \mathcal{L}[M_k]\,, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{5.5}$$

Satz 5.5 *Es seien $\mathcal{L}$ positiv definit und ψ_n wie in* (5.3) *definiert. Dann existiert eine Teilfolge $\left\{\psi_{n_j}\right\}_{j=1}^{\infty}$ mit $\psi_{n_j}(x) \longrightarrow \psi(x)$, $x \in \mathbb{R}$, so dass $\psi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Belegungsfunktion mit unendlichem Spektrum ist, für die* (5.5) *gilt.*

Eine Belegungsfunktion $\psi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit unendlichem Spektrum, die (5.5) erfüllt, nennt man eine **Darstellung** von $\mathcal{L}$.

Satz 5.6 (Darstellungstheorem) *Jedes positiv definite Momentenfunktional $\mathcal{L}$ besitzt eine Darstellung $\psi(x)$ mit $S(\psi) \subset [\eta_1, \xi_1]$. Ist umgekehrt $\psi(x)$ eine Darstellung von $\mathcal{L}$ mit $S(\psi) \subset (a,b)$, so folgt $(\eta_1, \xi_1) \subset (a,b)$ (vgl. Folg. 2.19).*

5.3 Zur Lage der Spektralpunkte einer Darstellung

Im Weiteren seien $\mathcal{L}$ stets **positiv definit** und $(P_n)_{n=0}^{\infty}$ das zugehörige **monische** OPS.

Satz 5.7 *Ist φ eine Darstellung von $\mathcal{L}$, so gilt*

$$S(\varphi) \cap (x_{n,j+1}, x_{nj}) \neq \emptyset \quad \forall\, j = 1, \ldots, n-1\,,\ \forall\, n = 2, 3, \ldots$$

Eine Darstellung ψ, die Grenzwert einer Teilfolge von $(\psi_n)_{n=1}^{\infty}$ ist (vgl. (5.3)), nennt man **natürliche Darstellung** von $\mathcal{L}$.

Satz 5.8 *Es seien ψ eine natürliche Darstellung von $\mathcal{L}$, $G \subset \mathbb{R}$ eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}$, und es existiere ein Index n_0, so dass $P_n(x) \neq 0$ für alle $x \in G$ und für alle $n > n_0$. Dann gilt $S(\psi) \cap G = \emptyset$.*

Wir definieren die Mengen

$$\mathbf{X} := \{x_{nj} : 1 \leq j \leq n\,,\ n = 1, 2, 3, \ldots\}$$

und

$$\mathbf{Z} = \{x \in \mathbb{R} : P_n(x) = 0 \text{ für unendlich viele } n\}\,.$$

$\mathbf{X}'$ bezeichne die Menge der Häufungspunkte der Menge $\mathbf{X}$.

Folgerung 5.9 *Es seien ψ eine natürliche Darstellung von $\mathcal{L}$ und $s \in S(\psi)$. Dann existieren für jedes $\varepsilon > 0$ und jeden Index $n \in \mathbb{N}$ ein Index $N > n$ und ein Index $k \in \{1, \ldots, N\}$, so dass $s - \varepsilon < x_{Nk} < s + \varepsilon$. Es gilt also*

$$S(\psi) \subset \mathbf{X}' \cup \mathbf{Z}\,. \tag{5.6}$$

Wir erinnern an die Definition der Zahlen ξ_j und η_j,

$$\xi_j = \lim_{n\to\infty} x_{nj}\,,\ \eta_j = \lim_{n\to\infty} x_{n,n-j+1}\,, \quad j = 1, 2, \ldots$$

Offenbar gilt

$$-\infty =: \eta_0 \leq \eta_1 \leq \eta_2 \leq \cdots \leq \eta \leq \xi \leq \cdots \leq \xi_2 \leq \xi_1 \leq \xi_0 := \infty\,,$$

wobei

$$\xi := \lim_{j\to\infty} \xi_j \quad \text{und} \quad \eta := \lim_{j\to\infty} \eta_j$$

zu setzen ist. Wir sagen, dass $+\infty \in \mathbf{X}'$ gilt, wenn für jedes $A > 0$ ein $x \in \mathbf{X} \cap (A, +\infty)$ existiert. Analog sei $-\infty \in \mathbf{X}'$ definiert.

Satz 5.10 *Für eine beliebige Darstellung φ von $\mathcal{L}$ gilt:*

(a) Aus $\eta_k < \eta_{k+1}$ folgt $S(\varphi) \cap (\eta_k, \eta_{k+1}] \neq \emptyset$.

(b) Aus $\eta_k = \eta_{k+1}$ folgt $\eta_k \in S(\varphi)'$.

(c) $\eta \in S(\varphi)'$.

Satz 5.11 *Sind* $\eta_1 > -\infty$ *und* ψ *eine natürliche Darstellung von* $\mathcal{L}$, *so gilt*

$$S(\psi) \cap (-\infty, \eta) = \{\eta_j : j \geq 1,\, \eta_j < \eta\} \ .$$

Satz 5.12 *Existiert ein Index* p *mit* $\eta_p = \eta_{p+1}$, *so gilt* $\eta_p = \eta$.

Es sind somit nur die folgenden drei Situationen möglich:

1. $-\infty = \eta_1 = \eta_2 = \cdots = \eta$,
2. $-\infty < \eta_1 < \cdots < \eta_p = \eta_{p+1} = \cdots = \eta$,
3. $-\infty < \eta_1 < \eta_2 < \cdots < \eta$.

Ist also ψ eine natürliche Darstellung des positiv definiten Momenfunktionals $\mathcal{L}$, so lässt sich das Spektrum von ψ in der Form

$$S(\psi) = \Sigma_\eta \cup S_1 \cup \Sigma_\xi$$

mit

$$\Sigma_\eta = \begin{cases} \emptyset\,, & \text{falls } \eta = -\infty\,, \\ \{\eta_j : j \geq 1\,,\ \eta_j < \eta\}\,, & \text{sonst}\,, \end{cases}$$

der analog definierten Menge Σ_ξ und einer Menge

$$S_1 \subset \begin{cases} [\eta, \xi] & : \ -\infty < \eta \leq \xi < +\infty\,, \\ (-\infty, \xi] & : \ -\infty = \eta < \xi < +\infty\,, \\ [\eta, +\infty) & : \ -\infty < \eta < \xi = +\infty\,, \\ (-\infty, +\infty) & : \ -\infty = \eta < \xi = +\infty\,, \end{cases}$$

schreiben.

5.4 Zur Bestimmtheit des Momentenfunktionals

Das Ziel unserer weiteren Überlegungen ist der Nachweis, dass für ein positiv definites Momentenfunktional $\mathcal{L}$ mit $-\infty < \eta_1 < \xi_1 < \infty$ sich zwei Belegungsfunktionen nur durch eine Konstante in ihren gemeinsamen Stetigkeitspunkten unterscheiden.

Mit $(P_n)_{n=0}^{\infty}$ sei wieder das monische OPS bezeichnet. Für ein $x_0 \notin (\eta_1, \xi_1)$ definieren wir

$$Q_n(x) = P_{n+1}(x) + a\, P_n(x) \quad \text{mit} \quad a = -\frac{P_{n+1}(x_0)}{P_n(x_0)} \neq 0\,.$$

Wegen $Q_n(x_{n+1,k}) = a\, P_n(x_{n+1,k})$ wechselt $Q_n(x_{n+1,k})$ das Vorzeichen (vgl. den Beweis von Satz 2.18), so dass $Q_n(x)$ genau $n+1$ reelle Nullstellen $x^*_{nk} \in (x_{n+1,k+1}, x_{n+1,k})$, $k = 1, \ldots, n$, und $x^*_{n0} = x_0$ besitzt.

Es sei φ eine Darstellung von $\mathcal{L}$. Es gibt nun Zahlen A^*_{nk}, so dass die Quadraturformel

$$\int_{-\infty}^{\infty} \pi(x)\,d\varphi(x) = \sum_{k=0}^{n} A^*_{nk}\pi(x^*_{nk})$$

für alle Polynome $\pi \in \mathbb{C}_{2n+1}[x]$ gilt. Analog zu Satz 2.27 gilt

$$A^*_{n0} = \left(\sum_{k=0}^{n} [\widetilde{p}_k(x_0)]^2\right)^{-1}, \tag{5.7}$$

wobei $(\widetilde{p}_n(x))_{n=0}^{\infty}$ das orthonormierte Polynomsystem zu $\mathcal{L}$ bezeichnet. Weiterhin kann man zeigen, dass die Ungleichungen

$$A^*_{n0} \geq \varphi(x_0) - \varphi(-\infty)\,, \quad x_0 \leq \eta_1\,, \tag{5.8}$$

und

$$A^*_{n0} \geq \varphi(+\infty) - \varphi(x_0)\,, \quad x_0 \geq \xi_1\,, \tag{5.9}$$

erfüllt sind. Unter Verwendung von (5.7), (5.8), (5.9) und Satz 4.39 ergibt sich

Folgerung 5.13 *Ist $-\infty < \eta_1 < \xi_1 < +\infty$, so gilt $S(\varphi) \subset [\eta_1, \xi_1]$ für jede Darstellung φ des positiv definiten Momentenfunktionals $\mathcal{L}$.*

Lemma 5.14 *Es seien $\varphi_j : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, $j = 1,2$, zwei Funktionen beschränkter Variation auf dem kompakten Intervall $[a,b]$ mit der Eigenschaft*

$$\int_a^b x^n\,d\varphi_1(x) = \int_a^b x^n\,d\varphi_2(x)\,, \quad n = 0,1,2,\ldots$$

Dann existiert eine Konstante $c \in \mathbb{R}$, so dass $\varphi_1(x) - \varphi_2(x) = c$ für alle gemeinsamen Stetigkeitspunkte $x \in [a,b]$ von φ_1 und φ_2 gilt.

Ein Momentenfunktional $\mathcal{L}$, dessen Darstellungen $\varphi(x)$ im Sinne von Lemma 5.14 eindeutig sind, heißt **determiniert**, und $\varphi(x)$ nennt man dann eine **im Wesentlichen eindeutige Darstellung** von $\mathcal{L}$.

Satz 5.15 *Ist $[\eta_1, \xi_1]$ kompakt, so ist $\mathcal{L}$ determiniert.*

Satz 5.16 *Für ein determiniertes Funktional $\mathcal{L}$ mit der wesentlich eindeutigen Darstellung $\varphi(x)$ gilt, dass $S(\varphi)$ Teilmenge jeder abgeschlossenen Trägermenge von $\mathcal{L}$ ist.*

Beispiel 5.17 (Stieltjes) *Die Momentenfolge*

$$\mu_n = \sqrt{\pi}e^{\frac{(n+1)^2}{4}}\,, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

definiert ein positiv definites Momentenfunktional, welches aber die wesentlich verschiedenen Darstellungen

$$\varphi_\gamma(x) = \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & : & x \leq 0 \\ \displaystyle\int_0^x e^{-\ln^2 t}[1 + \gamma\sin(2\pi \ln t)]\,dt & : & x > 0 \end{array} \right\}, \quad -1 < \gamma < 1$$

besitzt.

5.5 Klassische Momentenprobleme

1. **(Das Stieltjes'sche Momentenproblem)** T. J. STIELTJES formulierte 1894 das folgende Momentenproblem: Gegeben sei eine reelle Zahlenfolge $(\mu_n)_{n=0}^{\infty}$, gesucht sind notwendige und hinreichende Bedingungen für die Existenz einer Belegungsfunktion $\varphi(x)$ mit unendlichem Spektrum in $[0, \infty)$, so dass
$$\int_0^\infty x^n \, d\varphi(x) = \mu_n \, , \quad n = 0, 1, 2, \dots \, ,$$
gilt.

2. **(Das Hamburger Momentenproblem)** Um 1920/21 stellte H. HAMBURGER das zum Stietltesschen Momentenproblem analoge Problem, wobei lediglich das Interval $[0, \infty)$ durch $(-\infty, \infty)$ ersetzt ist.

Wir definieren (vgl. Abschnitt 2.1)

$$\Delta_n = \det \begin{bmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \mu_n \\ \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mu_n & \mu_{n+1} & \cdots & \mu_{2n} \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \Delta_n^{(1)} = \det \begin{bmatrix} \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_{n+1} \\ \mu_2 & \mu_3 & \cdots & \mu_{n+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mu_{n+1} & \mu_{n+2} & \cdots & \mu_{2n+1} \end{bmatrix} \, ,$$

$n = 0, 1, 2, \dots$

Satz 5.18 *Das Hamburger Momentenproblem besitzt genau dann eine Lösung, wenn für alle $n = 0, 1, 2, \dots$ die Ungleichung $\Delta_n > 0$ gilt.*

Satz 5.19 *Das Stieltjessche Momentenproblem besitzt genau dann eine Lösung, wenn für alle $n = 0, 1, 2, \dots$ die Ungleichungen $\Delta_n > 0$ und $\Delta_n^{(1)} > 0$ erfüllt sind.*

Satz 5.20 (Erstes allg. Darstellungstheorem) *Für eine beliebige Zahlenfolge $(\mu_n)_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ existiert eine Funktion $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ beschränkter Variation, so dass*
$$\int_{-\infty}^\infty x^n \, d\varphi(x) = \mu_n \, , \quad n = 0, 1, 2, \dots \, ,$$
gilt.

Satz 5.21 (Zweites allg. Darstellungstheorem) *Für zwei beliebige Zahlenfolgen $(\alpha_n)_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ und $(\beta_n)_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ sowie das Polynomsystem $(P_n(x))_{n=1}^{\infty}$, definiert durch die Rekursionsformel*
$$P_{-1} \equiv 0 \, , \; P_0 \equiv 1 \, , \; P_{n+1}(x) = (x - \alpha_n) P_n(x) - \beta_n P_{n-1}(x) \, , \; n = 1, 2, \dots$$
existiert eine Funktion $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ beschränkter Variation, so dass
$$\int_{-\infty}^\infty P_m(x) P_n(x) \, d\varphi(x) = \beta_0 \beta_1 \cdots \beta_n \delta_{mn} \, , \quad m, n = 0, 1, 2, \dots \, ,$$
gilt. Die Funktion $\varphi(x)$ kann genau dann reellwertig gewählt werden, wenn die Zahlenfolgen $(\alpha_n)_{n=0}^{\infty}$ und $(\beta_n)_{n=0}^{\infty}$ reell sind. Sie ist als Belegungsfunktion genau dann wählbar, wenn $\alpha_n \in \mathbb{R}$ und $\beta_n > 0$ für alle $n = 0, 1, 2, \dots$ gilt.

Kapitel 6

Zur numerischen Lösung von Integralgleichungen

6.1 Die Nyström-Methode

Wir betrachten eine Integralgleichung der Gestalt (Fredholm'sche Integalgleichung zweiter Art)

$$f(x) - \int_{-1}^{1} K(x,y) v^{\alpha,\beta}(y) f(y)\, dy = g(x)\,, \quad -1 < x < 1\,, \tag{6.1}$$

wobei $g : (-1,1) \longrightarrow \mathbb{R}$ und $K : (-1,1)^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ gegebene stetige Funktionen sind und die stetige Funktion $f : (-1,1) \longrightarrow \mathbb{R}$ gesucht ist. Mit $v^{\alpha,\beta}(x) = (1-x)^\alpha (1+x)^\beta$ bezeichnen wir ein Jacobi-Gewicht, wobei $-1 < \alpha, \beta$ vorausgesetzt sei (vgl. Abschnitt 2.5).

Wir bezeichnen mit $x_{nk}^{\alpha,\beta}$, $k = 1, \ldots, n$, $x_{nn}^{\alpha,\beta} < \ldots < x_{n1}^{\alpha,\beta}$, die Nullstellen des n-ten Jacobi-Polynoms $P_n^{\alpha,\beta}(x)$ und mit $\lambda_{nk}^{\alpha,\beta}$ die zugehörigen Gewichte der Gauß'schen Quadraturformel

$$\int_{-1}^{1} u(x) v^{\alpha,\beta}(x)\, dx \approx \sum_{k=1}^{n} \lambda_{nk}^{\alpha,\beta} u(x_{nk}^{\alpha,\beta})\,,$$

die auch **Christoffel-Zahlen** genannt werden. Eine erste Idee, eine Näherung für die Lösung von (6.1) zu bekommen, wäre das Integral in (6.1) durch die Quadraturformel zu ersetzen,

$$f_n(x) - \sum_{k=1}^{n} \lambda_{nk}^{\alpha,\beta} K(x, x_{nk}^{\alpha,\beta}) f_n(x_{nk}^{\alpha,\beta}) = g(x)\,, \quad -1 < x < 1\,. \tag{6.2}$$

Allerdings erhält man auf diese Weise noch keine vollständig diskretisierte Gleichung, also kein System von endlich vielen Gleichungen mit endlich vielen Unbekannten.

Nehmen wir an, dass (6.2) eine Lösung $f_n : (-1,1) \longrightarrow \mathbb{R}$ besitzt, so ist der Vektor $\left[\ \xi_{nk}\ \right]_{k=1}^{n} := \left[\ f_n(x_{nk}^{\alpha,\beta})\ \right]_{k=1}^{n}$ Lösung des linearen Gleichungssystems

$$\xi_{nj} - \sum_{k=1}^{n} \lambda_{nk}^{\alpha,\beta} K(x_{nj}^{\alpha,\beta}, x_{nk}^{\alpha,\beta}) \xi_{nk} = g(x_{nj}^{\alpha,\beta})\,, \quad j = 1, \ldots, n\,. \tag{6.3}$$

Wenn (6.2) eindeutig lösbar ist, so ist dies auch (6.3). Hat man die Lösung von (6.3), so ist

$$f_n(x) = g(x) + \sum_{k=1}^{n} \lambda_{nk}^{\alpha,\beta} K(x, x_{nk}^{\alpha,\beta}) \xi_{nk} = g(x) + \sum_{k=1}^{n} \lambda_{nk}^{\alpha,\beta} K(x, x_{nk}^{\alpha,\beta}) f_n(x_{nk}^{\alpha,\beta})$$

die Lösung von (6.2), die sogenannte **Nyström-Interpolante**.

Wir gehen nun davon aus, dass wir einen geeigneten Banachraum $\mathbf{X}$ auf $(-1,1)$ stetiger Funktionen gefunden haben, in dem wir die Gleichung (6.1) untersuchen können. Wir schreiben dann (6.1) in der Form

$$(\mathcal{I} - \mathcal{K})f = g$$

mit der Identität $\mathcal{I} : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{X}$ und dem Integraloperator

$$\mathcal{K} : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{X}\,, \quad f \mapsto \int_{-1}^{1} K(\,.\,, y) v^{\alpha,\beta}(y) f(y)\, dy\,.$$

Die Gleichung (6.2) können wir dann schreiben als

$$(\mathcal{I} - \mathcal{K}_n) f_n = g$$

mit der Folge $(\mathcal{K}_n)_{n=1}^{\infty}$ von Operatoren

$$\mathcal{K}_n : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{X}\,, \quad f \mapsto \sum_{k=1}^{n} \lambda_{nk}^{\alpha,\beta} K(\,.\,, x_{nk}^{\alpha,\beta}) f(x_{nk}^{\alpha,\beta})\,.$$

6.2 Kollektiv kompakte Operatorfolgen

Eine Teilmenge $A \subset \mathbf{E}$ eines metrischen Raumes $(\mathbf{E}, d)$ heißt **kompakt**, wenn aus jeder Überdeckung von A durch offene Teilmengen von $\mathbf{E}$ eine Überdeckung durch endlich viele Mengen ausgewählt werden kann. Man nennt A **relativ kompakt**, wenn die Abschließung $\overline{A}$ kompakt ist. Letzteres ist äquivalent dazu, dass jede Folge $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ von Punkten $x_n \in A$ eine konvergente Teilfolge besitzt.

Es sei $(\mathbf{E}, d)$ ein kompakter metrischer Raum. Mit $\mathbf{C}(\mathbf{E})$ bezeichnen wir den Banachraum aller stetigen Funktionen $f : \mathbf{E} \longrightarrow \mathbb{R}$, wobei die Norm in diesem Raum gegeben ist durch

$$\|f\|_\infty = \|f\|_{\infty,\mathbf{E}} = \max\left\{|f(x)| : x \in \mathbf{E}\right\}\,.$$

Eine Teilmenge $F \subset \mathbf{C}(\mathbf{E})$ heißt **gleichmäßig beschränkt**, wenn F in $(\mathbf{C}(\mathbf{E}), \|.\|_\infty)$ beschränkt ist, d.h., wenn eine Konstante $M \in (0, \infty)$ existiert, so dass

$$|f(x)| \le M \quad \forall\, x \in \mathbf{E}\,,\ \forall\, f \in F$$

gilt. Die Menge F heißt **gleichgradig stetig**, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon \quad \forall\, x_1, x_2 \in \mathbf{E} : d(x_1, x_2) < \delta\,,\ \forall\, f \in F$$

gilt.

Wir erinnern an das Theorem von **Arzela-Ascoli**: Eine Teilmenge $A \subset \mathbf{C}(\mathbf{E})$ ist genau dann relativ kompakt in $(\mathbf{C}(\mathbf{E}), \|.\|_\infty)$, wenn sie gleichmäßig beschränkt und gleichgradig stetig ist.

Beispiel 6.1 *Die Menge $\{f_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbf{C}(\mathbf{E})$ sei gleichmäßig beschränkt und gleichgradig stetig. Ferner existiere eine Funktion $f \in \mathbf{C}(\mathbf{E})$, so dass $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ für alle $x \in \mathbf{E}$ gilt. Dann folgt $\lim\limits_{n\to\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$.*

Es seien nun $(\mathbf{X}, \|.\|)$ ein Banachraum und $\mathcal{K}_n : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{X}$, $n \in \mathbb{N}$ eine Folge linearer Operatoren. Man nennt diese Folge **kollektiv kompakt**, wenn die Menge $\{\mathcal{K}_n f : f \in \mathbf{X}, \|f\| \le 1, n \in \mathbb{N}\}$ relativ kompakt in $\mathbf{X}$ ist. Hieraus folgt sofort, dass $(K_n)_{n=1}^\infty$ eine Folge gleichmäßig beschränkter und kompakter Operatoren ist.

Satz 6.2 *Es seien $\mathbf{X}$ ein Banachraum und $\mathcal{K} : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{X}$ sowie $\mathcal{K}_n : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{X}$, $n \in \mathbb{N}$ lineare Operatoren, für die $(K_n)_{n=1}^\infty$ relativ kompakt ist und $\lim\limits_{n\to\infty} \|\mathcal{K}_n f - \mathcal{K} f\| = 0$ für alle $f \in \mathbf{X}$ gilt. Für gegebenes $g \in \mathbf{X}$ betrachten wir die Gleichungen*

$$(\mathcal{I} - \mathcal{K})f = g \tag{6.4}$$

und

$$(\mathcal{I} - \mathcal{K}_n)f_n = g\,. \tag{6.5}$$

Es gilt dann:

(a) $\lim_{n\to\infty} \|(\mathcal{K}_n - \mathcal{K})\mathcal{K}_n\| = 0$

(b) *Ist der Nullraum $N(\mathcal{I} - \mathcal{K})$ trivial, d.h., die Gleichung (6.4) besitzt für $g = 0$ in $\mathbf{X}$ nur die triviale Lösung $f = 0$, so existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \ge n_0$ die Gleichung (6.5) eine eindeutige Lösung $f_n^* \in \mathbf{X}$ besitzt. Dabei gilt*

$$\|f_n^* - f^*\| \le c\,\|\mathcal{K}_n f^* - \mathcal{K} f^*\|$$

mit einer von $n \ge n_0$ und $g \in \mathbf{X}$ unabhängigen Konstanten $c \in (0,\infty)$ und der eindeutigen Lösung $f^* \in \mathbf{X}$ der Gleichung (6.4).

6.3 Der Fall $\alpha = \beta = 0$ und $\mathbf{X} = \mathbf{C}[-1,1]$

Es sei $\alpha = \beta = 0$. Wir betrachten die Gleichung (6.1) im Raum $\mathbf{C}[-1,1] = (\mathbf{C}[-1,1], \|.\|_\infty)$ der stetigen Funktionen $f : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{C}$ und setzen voraus, dass $K : [-1,1]^2 \longrightarrow \mathbb{C}$ stetig ist. Offenbar gilt

$$\|\mathcal{K}\| \le \max\left\{\int_{-1}^{1} |K(x,y)|\,dy : -1 \le x \le 1\right\}.$$

Wir untersuchen nun die entsprechende Folge von Operatoren $\mathcal{K}_n$,

$$(\mathcal{K}_n f)(x) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_{nk} K(x, x_{nk}) f(x_{nk})\,,$$

wobei $\lambda_{nk} = \lambda_{nk}^{0,0}$ und $x_{nk} = x_{nk}^{0,0}$ zu setzen ist. Die Menge

$$A = \{\mathcal{K}_n f : f \in \mathbf{C}[-1,1],\ \|f\|_\infty \le 1,\ n \in \mathbb{N}\}$$

ist gleichmäßig beschränkt und gleichgradig stetig:

- Es gilt
$$|(\mathcal{K}_n f)(x)| \le \|K\|_\infty \sum_{k=1}^n \lambda_{nk} \|f\|_\infty = 2\,\|K\|_\infty \|f\|_\infty \,, \tag{6.6}$$
wobei $\|K\|_\infty = \max\left\{|K(x,y)| : (x,y) \in [-1,1]^2\right\}$.

- Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert eine $\delta > 0$, so dass $K(x_1,y) - K(x_2,y) < \varepsilon \;\forall\, x_1,x_2,y \in [-1,1]$ mit $|x_1 - x_2| < \delta$. Daraus folgt
$$|(\mathcal{K}_n f)(x_1) - (\mathcal{K}_n f)(x_2)| \le 2\varepsilon \|f\|_\infty \,, \quad \forall\, x_1,x_2 \in [-1,1] : |x_1 - x_2| < \delta \,. \tag{6.7}$$

Somit ist die Folge $(\mathcal{K}_n)_{n=1}^\infty$ kollektiv kompakt in $\mathbf{C}[-1,1]$. Die Relationen (6.6) und (6.7) zeigen auch, dass für jedes $f \in \mathbf{C}[-1,1]$ die Menge $A_f = \{\mathcal{K}_n f : n \in \mathbb{N}\}$ relativ kompakt in $\mathbf{C}[-1,1]$ ist. Außerdem gilt nach Satz 2.24
$$\lim_{n\to\infty} (\mathcal{K}_n f)(x) = \mathcal{K}f(x) \,, \quad \forall\, x \in [-1,1] \,,$$
so dass nach Beispiel 6.1 $\lim\limits_{n\to\infty} \|\mathcal{K}_n f - \mathcal{K}f\|_\infty = 0$ für jedes $f \in \mathbf{C}[-1,1]$ gilt.

Damit liefert Satz 6.2 folgendes: Besitzt die Gleichung
$$f(x) - \int_{-1}^1 K(x,y) f(y) dy = 0 \,, \quad -1 \le x \le 1 \,,$$
in $\mathbf{C}[-1,1]$ nur die triviale Lösung $f \equiv 0$, so gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \ge n_0$ die Gleichung
$$f_n(x) - \sum_{k=1}^n \lambda_{nk} K(x,x_{nk}) f_n(x_{nk}) \,, \quad -1 \le x \le 1 \,,$$
eine eindeutige Lösung $f_n^* \in \mathbf{C}[-1,1]$ hat. Dabei gilt
$$\begin{aligned} \|f_n^* - f^*\|_\infty &\le c\,\|\mathcal{K}_n f^* - \mathcal{K}f^*\|_\infty \\ &= c\,\sup\left\{\left|\sum_{k=1}^n \lambda_{nk} K(x,x_{nk}) f^*(x_{nk}) - \int_{-1}^1 K(x,y) f^*(y)\,dy\right| : -1 \le x \le 1\right\} \end{aligned}$$
mit einer Konstanten $c \in (0,\infty)$, die weder von n noch von g abhängt, und mit der eindeutigen Lösung $f^* \in \mathbf{C}[-1,1]$ der Gleichung
$$f(x) - \int_{-1}^1 K(x,y) f(y) dy = g(x) \,, \quad -1 \le x \le 1 \,.$$

6.4 Die Verwendung gewichteter Räume stetiger Funktionen

Mit $\widetilde{\mathbf{C}}_u$ bezeichnen wir den Banachraum der stetigen Funktionen $f : (-1,1) \longrightarrow \mathbb{C}$, für die $uf : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig (genauer: in -1 und $+1$ stetig fortsetzbar) ist, versehen mit der Norm
$$\|f\|_{\infty,u} := \|uf\|_\infty = \sup\{|u(x)f(x)| : -1 < x < 1\} \,.$$
Dabei ist $u(x) = v^{\gamma,\delta}(x) = (1-x)^\gamma (1+x)^\delta$ mit $\gamma,\delta \in [0,\infty)$.

Bezüglich $K(x,y)$ machen wir folgende Voraussetzungen:

(A) $\widetilde{K} : [-1,1]^2 \longrightarrow \mathbb{C}$ ist stetig, wobei $\widetilde{K}(x,y) = v^{\gamma,\delta}(x)K(x,y)v^{\gamma_1,\delta_1}(y)$.

(B) $c_0 := \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{v^{\alpha,\beta}(x)\,dx}{v^{\gamma,\delta}(x)v^{\gamma_1,\delta_1}(x)} < \infty$, d.h. $\alpha+1>\gamma+\gamma_1$ und $\beta+1>\delta+\delta_1$.

Lemma 6.3 *Es seien $\alpha+\alpha_1>-1$ und $\beta+\beta_1>-1$ sowie $j\in\mathbb{N}$ fixiert. Dann exsitiert eine Konstante $c_1\in(0,\infty)$, so dass*

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_{nk}^{\alpha,\beta} \left|q(x_{nk}^{\alpha,\beta})\right| v^{\alpha_1,\beta_1}(x_{nk}^{\alpha,\beta}) \le c_1 \int_{-1}^{1} |Q(x)| v^{\alpha,\beta}(x) v^{\alpha_1,\beta_1}(x)\,dx$$

für alle Polynome $q\in\mathbb{C}[x]$ mit $\deg q \le jn$ gilt, $c_1 \ne c_1(n,q)$.

Mit $\mathbf{C}_u$ bezeichnen wir den abgeschlossenen linearen Teilraum von $\widetilde{\mathbf{C}}_u$ aller $f\in\widetilde{\mathbf{C}}_u$ mit

$$\lim_{x\to 1-0} u(x)f(x) = 0\,,\ \text{falls } \gamma>0\,, \quad \text{und} \quad \lim_{x\to -1+0} u(x)f(x)=0\,,\ \text{falls } \delta>0\,.$$

Lemma 6.4 *Die Menge $\mathbb{C}[x]$ ist dicht in $\mathbf{C}_u$.*

Lemma 6.5 *Für $u=v^{\gamma,\delta}$, $0\le\gamma<\alpha+1$, $0\le\delta<\beta+1$ und $f\in\mathbf{C}_u$ gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \lambda_{nk}^{\alpha,\beta} f(x_{nk}^{\alpha,\beta}) = \int_{-1}^{1} f(x) v^{\alpha,\beta}(x)\,dx\,.$$

Lemma 6.6 *Es seien die Bedingungen (A) und (B) erfüllt,*

$$\mathcal{K}_n : \widetilde{\mathbf{C}}_u \longrightarrow \widetilde{\mathbf{C}}_u\,, \quad f \mapsto \sum_{k=1}^{n} \lambda_{nk}^{\alpha,\beta} K(\,.\,,x_{nk}^{\alpha,\beta}) f(x_{nk}^{\alpha,\beta})\,.$$

Dann ist $(\mathcal{K}_n)_{n=1}^{\infty}$ kollektiv kompakt, und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \|\mathcal{K}_n f - \mathcal{K} f\|_{\infty,u} = 0 \quad \forall\, f\in\widetilde{\mathbf{C}}_u\,.$$

Zusammenfassend können wir damit Folgendes festhalten: Unter den Voraussetzungen, dass die Gleichung

$$f(x) - \int_{-1}^{1} K(x,y) v^{\alpha,\beta}(y) f(y)\,dy = 0\,, \quad -1<x<1\,,$$

in $\widetilde{\mathbf{C}}_u$ nur die triviale Lösung besitzt, die Funktion $\widetilde{K}(x,y) = v^{\gamma,\delta}(x)K(x,y)v^{\gamma_1,\delta_1}(y)$ auf $[-1,1]^2$ stetig ist und $0\le\gamma,\delta\le1$, $-1<\alpha,\beta$, $\gamma+\gamma_1<\alpha+1$, $\delta+\delta_1<\beta+1$ sowie $g\in\widetilde{\mathbf{C}}_u$ gilt, existieren ein $n_0\in\mathbb{N}$ und eine Konstante $c\ne c(n,g)$, so dass die Gleichung

$$f_n(x) - \sum_{k=1}^{n} \lambda_{nk}^{\alpha,\beta} K(x,x_{nk}^{\alpha,\beta}) f_n(x_{nk}^{\alpha,\beta}) = g(x)\,, \quad -1<x<1\,,$$

für alle $n\ge n_0$ eine eindeutige Lösung $f_n^*\in\widetilde{\mathbf{C}}_u$ besitzt und

$$\|f_n^* - f^*\|_{\infty,u} \le c \sup_{-1<x<1} v^{\gamma,\delta}(x) \left| \int_{-1}^{1} K(x,y) v^{\alpha,\beta}(y) f^*(y)\,dy - \sum_{k=1}^{n} \lambda_{nk}^{\alpha,\beta} K(x,x_{nk}^{\alpha,\beta}) f^*(x_{nk}^{\alpha,\beta}) \right| \tag{6.8}$$

gilt, wobei $f^* \in \widetilde{\mathbf{C}}_u$ die eindeutige Lösung der Gleichung

$$f(x) - \int_{-1}^{1} K(x,y) v^{\alpha,\beta}(y) f(y)\, dy = g(x)\,, \quad -1 < x < 1\,,$$

ist.

Um die Geschwindigkeit, mit der die rechte Seite in (6.8) gegen Null geht, abschätzen zu können, betrachten wir den Fehler $R_n^{\alpha,\beta}(f)$ in der Gauß'schen Quadraturformel

$$\int_{-1}^{1} f(x) v^{\alpha,\beta}(x)\, dx = \sum_{k=1}^{n} \lambda_{nk}^{\alpha,\beta} f(x_{nk}^{\alpha,\beta}) + R_n^{\alpha,\beta}(f)\,.$$

Mit $E_m(f)_{\infty,u}$ bezeichnen wir den Fehler der mittels $u(x)$ **gewichteten besten gleichmäßigen Approximation** von f durch Polynome vom Grad $< m$, d.h.

$$E_m(f)_{\infty,u} = \inf \left\{ \|f - p\|_{\infty,u} : p \in \mathbb{C}_m[x] \right\}\,.$$

Für $u \equiv 1$ schreiben wir einfach $E_m(f)_\infty$ statt $E_m(f)_{\infty,1}$.

Lemma 6.7 *Für $f \in \mathbf{C}[-1,1]$ gilt*

$$|R_n^{\alpha,\beta}(f)| \le 2 c_0^{\alpha,\beta} E_{2n}(f)_\infty\,,$$

wobei $c_0^{\alpha,\beta} = \int_{-1}^{1} v^{\alpha,\beta}(x)\, dx\,.$

Lemma 6.8 *Sind $0 \le \gamma < \alpha + 1$, $0 \le \delta < \beta + 1$ und $f \in \mathbf{C}_{v^{\gamma,\delta}}$, so gilt*

$$|R_n^{\alpha,\beta}(f)| \le c_{\gamma,\delta}^{\alpha,\beta} E_{2n}(f)_{\infty,v^{\gamma,\delta}}\,,$$

wobei $c_{\gamma,\delta}^{\alpha,\beta}$ nicht von n und f abhängt.

Unter Berücksichtigung von Lemma 6.7 oder Lemma 6.8 kann man aus (6.8) schließen, dass

$$\|f_n^* - f^*\|_{\infty,u} \le c \sup \left\{ v^{\gamma,\delta}(x) E_{2n}(K(x,\,.\,)f^*)_{\infty,v} : -1 < x < 1 \right\}$$

gilt, falls die Funktion $K(\,.\,,y)f^*(y)$, $-1 < y < 1$, entsprechende Eigenschaften bezüglich einer geeigneten Gewichtsfunktion $v(y)$ besitzt. Interessant sind dabei z. B. die Funktionenklassen

$$\mathbf{W}_{r,u}^\infty = \left\{ g \in \mathbf{C}_u : g^{(r)} \varphi^r \in \mathbf{C}_u \right\}\,, \quad r \in \mathbb{N}\,,$$

wobei $\varphi(x) = \sqrt{1-x^2}$ ist. Für $g \in \mathbf{W}_{1,u}^\infty$ gilt nämlich die Abschätzung

$$E_n(g)_{\infty,u} \le \frac{c_1}{n} \left\| g' \right\|_{\infty,\varphi u}\,, \quad c_1 \ne c_1(n,g)\,,$$

die für $g \in \mathbf{W}_{r,u}^\infty$ iteriert werden kann zu

$$E_n(g)_{\infty,u} \le \frac{c_r}{n^r} \left\| g^{(r)} \right\|_{\infty,\varphi^r u}\,, \quad c_r \ne c_1(n,g)\,.$$

Index

$D_\infty(S)$, 33
$E_m(f)_\infty$, 62
$E_m(f)_{\infty,u}$, 62
$I[\nu]$, 36
$M_k(x)$, 7
$P_n^{\alpha,\beta}(x)$, 26
$R_n^{\alpha,\beta}(f)$, 62
$S(\mu)$, 31
$T_n(x)$, 9
$V(E)$, 36
$\mathbf{C}(\mathbf{E})$, 58
$\mathbf{C}_u$, 60
$\mathcal{M}(E)$, 36
δ_{jk}, 7
$\ell_{nk}(x)$, 22
η_k, 22
γ_n, 31
$\|.\|_S$, 35
$\mathbb{C}[x]$, 7, 15
$\mathbb{K}[x]$, 7
$\langle .,.\rangle$, 7
$\widehat{P}_n^{\alpha,\beta}(x)$, 27
ξ_k, 22
$k_n^{\alpha,\beta}$, 27
$t_n(S)$, 35
$\mathrm{Pconv}(S)$, 33
$\mathrm{cap}(E)$, 36
$\mathrm{cheb}(S)$, 35
äußerer Rand, 36

Anfangsparameter, 45
Arzela-Ascoli, Theorem von, 58

Belegungsfunktion, 51

Chapman-Kolmogorov, Gleichungen von, 13
Charlier, 11
Charlier-Polynome, 11
Christoffel-Darboux, Formel von, 21
Christoffel-Zahlen, 57

Darstellung eines Momentenfunktionals, 52
Darstellung, im Wesentlichen eindeutige, 55
Darstellungstheorem, 52
Darstellungstheorem, erstes allgemeines, 56
Darstellungstheorem, zweites allgemeines, 56
determiniertes Momentenfunktional, 55

Energie, 36
erzeugende Funktion, 11

Gauß'sche Quadraturformel, 23
Gleichgewichtsverteilung, 36
gleichgradig stetige Funktionen, 58
gleichmäßig beschränkte Funktionen, 58
Grad eines Polynoms, 7
Greensche Funktion, 36

Hamburger Momentenproblem, 56
Hermite-Polynome, 14

inneres Produkt, 7
Interpolationspolynom, 23

Jacobi-Bruch, 43
Jacobi-Polynome, 26

Kettenbruch, 39
Kettenfolge, 45
kollektiv kompakte Operatoren, 59
kompakte Menge, 58
konvergenter Kettenbruch, 40

Lagrange'sche Grundpolynome, 22
Legendre, 8
Legendre-Polynome, 8
Leitkoeffizient, 7
logarithmische Kapazität, 36
logarithmisches Potential, 36

maximale Parameterfolge, 45
minimale Parameterfolge, 45
Moment, 15, 51
Momentenfunktional, 9, 15
Momentenproblem, 8
monisches OPS, 16
monisches Polynom, 16

monisches Zählerpolynom, 44

Näherungsbruch, 39
natürliche Darstellung, 53
Nyström-Interpolante, 58

ONPS, 15
ONPS, orthonormales Polynomsystem, 8
OPS, 15
OPS, orthogonales Polynomsystem, 9
orthogonales Polynom, 15
orthogonales Polynomsystem, 15
orthonormales Polynom, 15
orthonormales Polynomsystem, 15

Parameterfolge, 45
partieller Nenner, 41
partieller Zähler, 41
polynomiale konvexe Hülle, 33
positiv definites Momentenfunktional, 17, 22

quasi-definites Momentenfunktional, 18

Rekursionsformel, 19
relativ kompakte Menge, 58
Rodrigues, 8
Rodrigues'sche Formel, 8
Rodriguessche Formel, 26

Skalarprodukt, 7
Spektralpunkt, 51
Spektrum einer Belegungsfunktion, 51
Stieltjessches Momentenproblem, 56

Träger, 22
Trägermenge, 22
Tschebyscheff, 9
Tschebyscheff-Gewicht erster Art, 9
Tschebyscheff-Konstante, 35
Tschebyscheff-Polynom, 35
Tschebyscheff-Polynome erster Art, 9
Tschebyscheff-Polynome zweiter Art, 14

Vergleichstest, 46
vollständig reguläres Maß, 35

Zählerpolynom, 44