Probeklausur Funktionentheorie mit Lösungen

Arbeitszeit: 120 Minuten

1. Berechnen Sie Real- und Imaginärteil $u(x,y)$ und $v(x,y)$ der Funktion $f(z) = ze^{-z^2}$, $z = x + \mathbf{i}y$.

   - Es ist $f(z) = (x+\mathbf{i}y)e^{-(x^2-y^2+2\mathbf{i}xy)} = e^{y^2-x^2}(x+\mathbf{i}y)\,[\cos(2xy) - \mathbf{i}\sin(2xy)]$, so dass
   $$u(x,y) = e^{y^2-x^2}\,[x\,\cos(2xy) + y\,\sin(2xy)]\ ,$$
   $$v(x,y) = e^{y^2-x^2}\,[y\,\cos(2xy) - x\,\sin(2xy)]\ .$$

   (2 P)

2. Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet.

   (a) Wann nennt man eine Funktion $f : G \longrightarrow \mathbb{C}$ im Punkt $z_0 \in G$ differenzierbar und wann in z_0 holomorph?

   - Differenzierbarkeit: $\exists f'(z_0) := \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h}$
     Holomorphie: $\exists f'(z)\ \forall\, z \in U_\varepsilon(z_0)$ für ein gewisses $\varepsilon > 0$

   (2 P)

   (b) In welchen Punkten der komplexen Ebene ist die Funktion $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto z\,\mathsf{Re}\,z$ differenzierbar?

   - Die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen sind nur in $z_0 = 0$ erfüllt. Dort gilt $f(z) = f(z_0) + (z - z_0)g(z)$ mit der in z_0 stetigen Funktion $g(z) = \mathsf{Re}\,z$.
     Also: f ist nur in $z_0 = 0$ differenzierbar.

   (2 P)

3. Bestimmen Sie das maximale (offene) Konvergenzgebiet der Reihe
   $$1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^n = 1 + 2\frac{z-1}{z+1} + 2\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2 + \ldots$$
   Wie lautet dort ihre Summenfunktion?

   - $1+2\dfrac{z-1}{z+1}+2\left(\dfrac{z-1}{z+1}\right)^2+\ldots = -1+2\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^n$ konvergiert für $\left|\dfrac{z-1}{z+1}\right| < 1$ gegen die Summenfunktion $2\left(\dfrac{1}{1-\frac{z-1}{z+1}}\right) - 1 = z$. Das Konvergenzgebiet ist charakterisiert durch $|z-1| < |z+1| \iff (x-1)^2 < (x+1)^2 \iff x > 0$ (wobei $z = x + \mathbf{i}y$), d.h., die Reihe konvergiert auf $\{z \in \mathbb{C} : \mathsf{Re}\,z > 0\}$.

   (3 P)

4. Entwickeln Sie die Funktion $f(z) = \dfrac{z}{z^2-1}$ nach Potenzen von z und nach Potenzen von $z-1$. Geben Sie jeweils das maximale (offene) Konvergenzgebiet der Reihen an.

   - $f(z) = -\dfrac{z}{1-z^2} = -\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} z^{2n+1}\,, \quad |z| < 1$ (2 P)
   - $f(z) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{z-1} + \dfrac{1}{z+1}\right) = \dfrac{1}{2}(z-1)^{-1} + \dfrac{1}{4}\,\dfrac{1}{1-\dfrac{1-z}{2}}$
   $= \dfrac{1}{2}(z-1)^{-1} + \dfrac{1}{4}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n (z-1)^n\,, \quad 0 < |z-1| < 2$ (3 P)

5. Entwickeln Sie die Funktion $f(z) = (z^2-1)e^{(z-1)^{-1}}$ um $z_0 = 1$ in eine Laurent-Reihe und geben Sie das maximale (offene) Konvergenzgebiet an.

- Wegen $e^w = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{n!}$ $\forall\, w \in \mathbb{C}$ gilt für $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$

$$\begin{aligned} f(z) &= (z+1)(z-1)\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-1)^{-n}}{n!} = (z-1+2)\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-1)^{1-n}}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-1)^{2-n}}{n!} + 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-1)^{1-n}}{n!} = \sum_{n=2}^{-\infty} \frac{5-2n}{(2-n)!}\,(z-1)^n\,. \end{aligned}$$

(4 P)

6. Berechnen Sie folgende Integrale (Ergebnisse in der Form $z = x + \mathbf{i}y$):

(a) $\int_{\Gamma_1} |z|^2\, dz$, Γ_1 - oberer Halbkreis von 2 nach 0 mit dem Mittelpunkt 1 und Radius 1

- Mit der Substitution $z = e^{\mathbf{i}\varphi} + 1$, $dz = \mathbf{i}e^{\mathbf{i}\varphi}\, d\varphi$ und $|z|^2 = 2(1+\cos\varphi)$ ist das Integral gleich

$$\begin{aligned} &2\mathbf{i}\int_0^{\pi} (1+\cos\varphi)(\cos\varphi + \mathbf{i}\sin\varphi)\, d\varphi \\ &= 2\mathbf{i}\int_0^{\pi} \left[\cos\varphi + \frac{1}{2}\,(1+\cos 2\varphi)\right] d\varphi - 2\int_0^{\pi} \left[\sin\varphi + \frac{1}{2}\,\sin 2\varphi\right] d\varphi = \pi\mathbf{i} - 4\,. \end{aligned}$$

(3 P)

(b) $\int_{|z-1|=4} \frac{\sin z}{z-\mathbf{i}}\, dz$

- Nach der Cauchy'schen Integralformel (oder dem Residuensatz) ist

$$\int_{|z-1|=4} \frac{\sin z}{z-\mathbf{i}}\, dz = 2\pi\mathbf{i}\,\sin\mathbf{i} = \pi(e^{-1} - e)\,.$$

(2 P)

(c) $\int_{|z-1|=a} \frac{z\, dz}{(z+2)(z-2\mathbf{i})^2}$ für die Fälle $a = 1$ und $a = 5$

- Nach dem Cauchy'schen Integralsatz ist das Integral im Fall $a = 1$ gleich Null.

(1 P)

- Im Fall $a = 5$ ist nach dem Residuensatz

$$\int_{|z-1|=5} f(z)\, dz = 2\pi\mathbf{i}(\mathrm{res}_{-2}f + \mathrm{res}_{2\mathbf{i}}f) = 2\pi\mathbf{i}\left(\frac{-2}{(-2-2\mathbf{i})^2} + \frac{2}{(2\mathbf{i}+2)^2}\right) = 0\,.$$

(2 P)

7. Berechnen Sie $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos(\alpha x)\,dx}{1+x^2}$ für $\alpha > 0$.

- Aus $\operatorname{res}_{\mathbf{i}} \dfrac{e^{\mathbf{i}\alpha z}}{1+z^2} = \left.\dfrac{e^{\mathbf{i}\alpha z}}{z+\mathbf{i}}\right|_{z=\mathbf{i}} = \dfrac{e^{-\alpha}}{2\mathbf{i}}$ und dem Residuensatz folgt für $R > 1$

$$\pi\, e^{-\alpha} = \int_{-R}^{R} \frac{e^{\mathbf{i}\alpha z}}{1+z^2}\,dz + \int_{|z|=R, \mathsf{Im}\, z \geq 0} \frac{e^{\mathbf{i}\alpha z}}{1+z^2}\,dz = 2\int_0^R \frac{\cos(\alpha x)\,dx}{1+x^2} + I_R$$

mit

$$|I_R| \leq \frac{R}{R^2-1}\int_0^\pi e^{-\alpha R \sin\varphi}\,d\varphi \leq \frac{R\pi}{R^2-1} \longrightarrow 0 \ (R \longrightarrow \infty)\,.$$

Es folgt

$$\int_0^\infty \frac{\cos(\alpha x)\,dx}{1+x^2} = \frac{\pi\, e^{-\alpha}}{2}\,.$$

(4 P)

8. Mit $\mathrm{Log} : \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] \longrightarrow \mathbb{C}$ bezeichnen wir den Hauptzweig des Logarithmus. Berechnen Sie unter Verwendung des Hauptzweiges des Logarithmus die Potenz $(\mathrm{Log}\,\mathbf{i})^{\mathbf{i}}$ in der trigonometrischen Form $r\, e^{\mathbf{i}\varphi}$.

- $(\mathrm{Log}\,\mathbf{i})^{\mathbf{i}} = \left(\frac{\pi}{2}\,\mathbf{i}\right)^{\mathbf{i}} = e^{\mathbf{i}\mathrm{Log}\left(\frac{\pi}{2}\,\mathbf{i}\right)} = e^{\mathbf{i}\left(\ln\frac{\pi}{2} + \mathbf{i}\frac{\pi}{2}\right)} = e^{-\frac{\pi}{2}} e^{\mathbf{i}\ln\frac{\pi}{2}}$ (1 P)

9. Bestimmen Sie das Bild des Kreisringes $\{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}$ unter der Abbildung

$$w = f(z) = \frac{z}{z-1}\,.$$

Welche Menge wird durch f auf die offene Einheitskreisscheibe abgebildet?

- Wir haben es mit einer Möbius-Transformation zu tun. Es gilt $f(1) = P_\infty$, $f(-1) = \dfrac{1}{2}$, $f(\mathbf{i}) = \dfrac{1-\mathbf{i}}{2}$ sowie $f(0) = 0$, so dass

$$f\left(\{|z| > 1\}\right) = \left\{\mathsf{Re}\, z > \frac{1}{2}\right\}\,.$$

Aus $f(2) = 2$, $f(-2) = \dfrac{2}{3}$ und $f(\overline{z}) = \overline{f(z)}$ sowie $f(1) = P_\infty$ folgt

$$f\left(\{|z| < 2\}\right) = \left\{\left|z - \frac{4}{3}\right| > \frac{2}{3}\right\}\,.$$

Es folgt

$$f\left(\{1 < |z| < 2\}\right) = \left\{z \in \mathbb{C} : \left|z - \frac{4}{3}\right| > \frac{2}{3}, \mathsf{Re}\, z > \frac{1}{2}\right\}\,.$$

(3 P)

- Die Umkehrabbildung lautet $f^{-1}(w) = \dfrac{w}{w-1} = f(w)$. Daraus folgt

$$f^{-1}(\{w \in \mathbb{C} : |w| < 1\}) = \left\{w \in \mathbb{C} : \mathsf{Re}\, w < \frac{1}{2}\right\}\,.$$

(1P)