Prof. Dr. Peter Junghanns
Dr. Ralf Hielscher
PD Dr. Thomas Kalmes

Technische Universität Chemnitz
Fakultät für Mathematik
WS 17/18

Übungen zur Vorlesung Analysis 1

http://www.tu-chemnitz.de/∼ peju/

Übungsblatt 8 - Kompaktheit und Stetigkeit II

Aufgabe 1: Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf Stetigkeit

i) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-3x+2}{x-2}, & x \neq 2 \\ 1, & x = 2 \end{cases}$,

ii) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2+y^2 = 0 \end{cases}$.

Aufgabe 2: Seien $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen. Zeigen Sie, dass auch

$$\max(f,g)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \max(f,g)(x) = \max\{f(x), g(x)\}$$

und

$$\min(f,g)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \min(f,g)(x) = \min\{f(x), g(x)\}$$

stetige Funktionen sind.

Aufgabe 3:

a) Zeigen Sie: eine Abbildung $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x))$ ist genau dann stetig, wenn alle Koordinatenfunktionen $f_j\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $j = 1, \ldots, n$ stetig sind.

b) Gilt auch die „Umkehrung“, d.h., eine Funktion $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ ist genau dann stetig, wenn für alle $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_m)^T \in \mathbb{R}^m$ und alle $j = 1, \ldots, m$ die Funktionen $f_{\mathbf{x},j}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_{\mathbf{x},j}(y) = f(x_1, x_2, \ldots, x_{j-1}, y, x_{j+1}, \ldots, x_m)$ stetig sind?

Aufgabe 4: Es seien X und Y metrische Räume, $A, B \subset X$ offen mit $A \cup B = X$. Weiter seien $f_A\colon A \to Y$ und $f_B\colon B \to Y$ stetige Funktionen, so dass $f_A(x) = f_B(x)$ für alle $x \in A \cap B$. Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f\colon X \to Y, \quad f(x) = \begin{cases} f_A(x), & x \in A \\ f_B(x), & x \in B \end{cases}$$

stetig ist.

Aufgabe 5: Es seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume und $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ eine stetige Abbildung. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

a) Ist $A \subset X$ kompakt, so ist auch $f(A) \subset Y$ kompakt.

b) Ist X kompakt und $A \subset X$ abgeschlossen, so ist auch $f(A)$ abgeschlossen.

c) Ist X kompakt und f bijektiv, so ist auch die Umkehrabbildung $f^{-1}\colon (Y, d_Y) \to (X, d_X)$ stetig.

Aufgabe 6: Es seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume, $X_0 \subset X$ zusammenhängend und $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ eine stetige Abbildung. Verwenden Sie die Charakterisierung der Eigenschaft "zusammenhängend" aus Aufgabe 11 von Übungsblatt 5, um zu zeigen, dass $f(X_0)$ eine zusammenhängende Teilmenge von Y ist.