Prof. Dr. Peter Junghanns
Dr. Ralf Hielscher
Prof. Dr. Thomas Kalmes

Technische Universität Chemnitz
Fakultät für Mathematik
SS 18

Übungen zur Vorlesung Analysis 2

http://www.tu-chemnitz.de/∼ peju/

Übungsblatt 7 - Riemann-Stieltjes-Integral und Fourier-Reihen

Aufgabe 1: Berechnen Sie folgende Riemann-Stieltjes-Integrale:

a) $\int_{-1}^{3} x\, d\mu(x)\,, \mu(x) = \begin{cases} -1, & x = -1 \\ 0, & x \in (-1,2) \\ 1, & x \in [2,3] \end{cases}$ b) $\int_{-2}^{2} x^2\, d\mu(x)\,, \mu(x) = \begin{cases} x+2, & x \in [-2,-1] \\ 2, & x \in (-1,0) \\ x^2+3, & x \in [0,2] \end{cases}$

Aufgabe 2: Sei $\alpha_k \in \mathbb{R}$, $k = 0, \ldots, n$ eine Folge von Amplituden und $\beta_k \in [0, 2\pi]$ eine Folge von Phasenverschiebungen. Stellen Sie die Funktion

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \cos(kx + \beta_k)$$

als Linearkombination von

a) $\sin kx$ und $\cos kx$ b) e^{ikx}

dar.

Aufgabe 3: Seien $f, g \in C(\mathbb{R})$, 2π-periodische Funktionen und $x, \omega, t \in \mathbb{R}$. In welchem Zusammenhang stehen die Fourier-Koeffizienten von f und g, wenn

a) $g(x) = f(-x)$,
b) $g(x) = f(x+t)$,
c) $g(x) = e^{\omega x} f(x)$,
d) $f \in C^1(\mathbb{R})$, $g(x) = f'(x)$

Aufgabe 4: Entwickeln Sie folgende Funktionen in eine Fourier-Reihe und geben Sie die Summe dieser Fourier-Reihe an:

a) $f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ x, & x \geq 0, \end{cases}$ b) $f(x) = |x|$, c) $f(x) = \frac{\pi}{2} - |x|$,

Aufgabe 5: Berechnen Sie die Summe $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^4}$.

Aufgabe 6: Zeigen Sie: Ist $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ stetig differenzierbar und 2π-periodisch, so gilt

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (|n|+1)^2 |\hat{f}_n|^2 < \infty\,,$$

und die Fourier-Reihe $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}_n e^{inx}$ ist absolut konvergent.

Aufgabe 7: Berechnen Sie die folgenden Cauchyschen Hauptwerte:

a) v.p. $\displaystyle\int_{-1}^{e} \frac{dx}{x}$

b) v.p. $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{dx}{x \ln x}$

Hausaufgaben

Abgabe 02.07.2018

Aufgabe 1: Zeigen Sie, dass man jede stetig differenzierbare und π-periodische Funktion $f\colon [0,\pi] \to \mathbb{R}$ durch eine Kosinusreihe 2 Punkte

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos kx$$

approximieren kann. Geht das auch mit einer Sinusreihe?

Aufgabe 2: Bestimmen Sie für folgende 2π-periodischen Funktionen $f\colon [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$ die zugehörige Fourierreihe und die zugehörige Sinus / Kosinusreihe: 4 Punkte

a) $f(x) = \cos(ax)$, $a \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$,

b) $f(x) = \max(0, \cos x)$,

c) $f(x) = |\sin x|$.

Verwenden Sie Ihr Ergebnis zu a), um für $a \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2a}{a^2 - n^2} = \pi \cot(\pi a) - \frac{1}{a}$$

zu zeigen.

Aufgabe 3: Berechnen Sie die folgenden Cauchyschen Hauptwerte, falls diese existieren: 4 Punkte

a) v.p. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1+x}{1+x^2}\, dx$

b) v.p. $\displaystyle\int_a^b \frac{1}{(x-c)^n}\, dx$, wobei $c \in (a,b), n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$.

Aufgabe 4: Sei $f : [0,\infty) \to (0,\infty)$ stetig. Zeigen Sie, dass die Funktion 2 Punkte

$$\varphi : (0,\infty) \to \mathbb{R}\,, \quad \varphi(x) = \frac{\displaystyle\int_0^x t\, f(t)\, dt}{\displaystyle\int_0^x f(t) dt}$$

monoton wachsend ist.