Prof. Dr. Peter Junghanns
Dr. Ralf Hielscher
PD Dr. Thomas Kalmes

Technische Universität Chemnitz
Fakultät für Mathematik
WS 17/18

Übungen zur Vorlesung Analysis 1

http://www.tu-chemnitz.de/∼ peju/

Übungsblatt 7 - Folgen

Aufgabe 1: Bestimmen Sie den Grenzwert $a \in \mathbb{R}$ der folgenden Zahlenfolgen, indem Sie zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ angeben, so dass $|x_n - a| < \varepsilon$ für alle $n > N(\varepsilon)$ gilt.

a) $x_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$, b) $x_n = \dfrac{1}{n^2}\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)$, c) $x_n = \dfrac{\sin n}{2 + \sqrt[3]{n^5}}$.

Aufgabe 2: Bestimmen Sie die Grenzwerte folgender Zahlenfolgen $(x_n)_{n=1}^{\infty}$:

a) $x_n = \dfrac{n^2 - n + 2}{3n^2 + 2n + 4}$,

b) $x_n = \dfrac{n}{\sqrt{n^2 + 2}}$,

c) $x_n = (n+1)^q - n^q$, $(0 < q < 1)$,

d) $x_n = \sqrt{n}\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$,

e) $x_n = \sqrt[n]{n+1}$.

Aufgabe 3: Zeigen Sie:

a) Ist $0 \le a < b$ und $k \in \mathbb{N}$, so gilt $0 < \sqrt[k]{b} - \sqrt[k]{a} \le \sqrt[k]{b-a}$.

b) Gilt für eine Zahlenfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $a_n \ge 0$ und $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, so ist $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{a}$, $k \in \mathbb{N}$.

c) Gilt für eine Zahlenfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $a_n \ge 0$ und $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, so ist $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^q = a^q$, $q \in \mathbb{Q}$.

Aufgabe 4: Für welche $z \in \mathbb{C}$ existieren die Grenzwerte:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} z^n$, b) $\lim\limits_{n\to\infty} nz^n$, c) $\lim\limits_{n\to\infty} n!z^n$, d) $\lim\limits_{n\to\infty} n^{-1}z^n$?

Aufgabe 5: Betrachten Sie zu $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ und beliebigen Startwert $x_0 > 0$, die rekursive Zahlenfolge

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right).$$

a) Zeigen Sie, dass die Zahlenfolge für $n > 2$ monoton fallend und beschränkt ist.

b) Bestimmen Sie den Grenzwert der Zahlenfolge.

Aufgabe 6: Berechnen Sie $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$ und $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$ für die Zahlenfolgen

a) $a_n = \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1+(-1)^n}{2}$, b) $a_n = n^{(-1)^n}$, c) $a_n = 1 + \frac{n}{n+1}\cos\frac{2\pi n}{4}$.

Aufgabe 7: Es seien $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkte Folgen reeller Zahlen. Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

a) $\underline{\lim}\, x_n + \underline{\lim}\, y_n \le \underline{\lim}\,(x_n + y_n) \le \underline{\lim}\, x_n + \overline{\lim}\, y_n$,

b) $\underline{\lim}\, x_n \cdot \underline{\lim}\, y_n \le \underline{\lim}\,(x_n y_n) \le \underline{\lim}\, x_n \cdot \overline{\lim}\, y_n$, falls $\forall\, n \in \mathbb{N}:\ x_n \ge 0\,,\ y_n \ge 0$.

Aufgabe 8: Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Zahlenfolge mit $|a_{n+1} - a_n| < \frac{1}{2^n}$. Zeigen Sie $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent.

Aufgabe 9: Zeigen Sie: Jede Folge reeller Zahlen besitzt besitzt eine monotone Teilfolge.

Hausaufgaben

Abgabe Mo, 22.01.2018

Aufgabe 1: Bestimmen Sie den Grenzwert $a \in \mathbb{R}$ der folgenden Zahlenfolgen, indem Sie zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ angeben, so dass $|x_n - a| < \varepsilon$ für alle $n > N(\varepsilon)$ gilt. 3 Punkte

a) $x_n = \dfrac{n^3 + n^2 + 1}{n^4 - 3n^3 + 2n^2 + 1}$,

b) $x_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^4$.

Aufgabe 2: Bestimmen Sie die Grenzwerte folgender Zahlenfolgen 4 Punkte

a) $x_n = \sqrt[n]{4^n + 3^n + 2^n}$,

b) $x_n = \frac{3n^2 + \sqrt{n^3+2}}{n^2 - n + 1}$,

c) $x_n = \sqrt{n + \sqrt{n}} - \sqrt{n - \sqrt{n}}$,

d) $z_n = (\frac{\sqrt{2}}{4}(1 + \mathbf{i}))^n$.

Aufgabe 3: Bestimmen Sie den Grenzwert der rekursiv definierten Folge 2 Punkte

$$x_n = \frac{x_{n-2} + x_{n-1}}{2}, \quad n \in \mathbb{N}$$

mit den Startwerten $x_0 = 2$ und $x_1 = 1$.

Aufgabe 4: Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei positive Zahlenfolgen, d.h., $a_n > 0$ und $b_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Implikationen 2 Punkte

a) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n - b_n = 0 \implies \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = 1$,

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = 1 \implies \lim\limits_{n\to\infty} a_n - b_n = 0$.

Aufgabe 5: Zeigen Sie, dass $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ genau dann gilt, wenn $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n| = 0$. 2 Punkte

Aufgabe 6: Berechnen Sie $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$ und $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$ für die Zahlenfolgen 4 Punkte

a) $a_n = \dfrac{n^2}{1+n^2} \cos \dfrac{2n\pi}{3}$,

b) $a_n = \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k$,

c) $a_n = (-1)^n \left(1 + \dfrac{(-1)^n}{n}\right)^{2n} + \cos(n\pi)$,

d) $a_n = \operatorname{Im}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{i}\right)^n$,

wobei $\operatorname{Im}(z) = y$ den Imaginärteil der komplexen Zahl $z = x + y\mathbf{i}$ bezeichnet.

Aufgabe 7: Es seien $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkte Folgen reeller Zahlen. Beweisen Sie die folgenden Aussagen. 4 Punkte

a) $\underline{\lim}\, x_n + \underline{\lim}\, y_n \le \underline{\lim}\, (x_n + y_n) \le \underline{\lim}\, x_n + \overline{\lim}\, y_n$,

b) $\underline{\lim}\, x_n \cdot \underline{\lim}\, y_n \le \underline{\lim}\, (x_n y_n) \le \underline{\lim}\, x_n \cdot \overline{\lim}\, y_n$, falls $\forall\, n \in \mathbb{N} :\ x_n \ge 0\,,\ y_n \ge 0$.