Prof. Dr. Peter Junghanns
Dr. Ralf Hielscher
PD Dr. Thomas Kalmes

Technische Universität Chemnitz
Fakultät für Mathematik
WS 17/18

Übungen zur Vorlesung Analysis 1

http://www.tu-chemnitz.de/∼ peju/

Übungsblatt 6 - Kompaktheit und Stetigkeit I

Aufgabe 1: Es seien X eine nichtleere Menge und d die diskrete Metrik auf X; vgl. Aufgabe 1 des 5. Übungsblatts. Charakterisieren Sie die kompakten Teilmengen von (X, d).

Aufgabe 2: Verwenden Sie die ε-δ-Definition der Stetigkeit, um die folgenden Funktionen auf Stetigkeit zu untersuchen, wobei alle Mengen mit der Euklidischen Metrik versehen sind:

i) $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}, f(x) = x^2$,

ii) $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x}$,

iii) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$,

iv) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, f(x_1, x_2) = x_1 x_2$,

v) $f : \mathbb{R}^2 \backslash \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 = 0\} \to \mathbb{R}^2, f(x_1, x_2) = \frac{x_1}{x_2}$.

Welche Funktionen sind gleichmäßig stetig?

Aufgabe 3: Es seien d_1 und d_2 zwei Metriken auf der Menge X. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

i) Die Abbildung $id_X : (X, d_1) \to (X, d_2), x \mapsto x$ ist stetig.

ii) Jede Teilmenge $A \subset X$, die offen in (X, d_2) ist, ist auch in (X, d_1) offen.

iii) Jede Teilmenge $A \subset X$, die abgeschlossen in (X, d_2) ist, ist auch in (X, d_1) abgeschlossen.

Geben Sie außerdem eine Menge X und zwei Metriken d_1 und d_2 auf X an, so dass die Abbildung $id_X : (X, d_1) \to (X, d_2), x \mapsto x$ nicht stetig ist.

Aufgabe 4: Es sei (X, d) ein metrischer Raum und $\emptyset \neq A \subset X$. Für $x \in X$ ist

$$\operatorname{dist}(x, A) := \inf\{d(x, a) : a \in A\}$$

der *Abstand von x zu A*. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

i) Für alle $x, y \in X$ ist $|\operatorname{dist}(x, A) - \operatorname{dist}(y, A)| \leq d(x, y)$. (Verwenden Sie Aufgabe 5 des 5. Übungsblatts!)

ii) Die Abbildung $\operatorname{dist}(\cdot, A) : (X, d) \to (\mathbb{R}, d_2), x \mapsto \operatorname{dist}(x, A)$ ist gleichmäßig stetig.

iii) Für $x \in X$ gilt $x \in \bar{A}$ genau dann, wenn $\operatorname{dist}(x, A) = 0$.

Wir wünschen schöne Weihnachtstage und einen guten Rutsch ins Neue Jahr!