Prof. Dr. Peter Junghanns
Dr. Ralf Hielscher
Prof. Dr. Thomas Kalmes

Technische Universität Chemnitz
Fakultät für Mathematik
SS 18

Übungen zur Vorlesung Analysis 2

http://www.tu-chemnitz.de/∼ peju/

Übungsblatt 5 - Funktionenfolgen

Aufgabe 1: Untersuchen Sie die Funktionenfolgen (f_n) auf gleichmäßige bzw. punktweise Konvergenz:

a) $f_n(x) = \dfrac{\sin nx}{n}$, $x \in \mathbb{R}$,

b) $f_n(x) = \sin \dfrac{x}{n}$, $x \in \mathbb{R}$,

c) $f_n(x) = \dfrac{1}{1+nx}$, $x \in [0,1]$,

d) $f_n(x) = x^n$, $x \in [0, 1-\varepsilon]$ $(\varepsilon > 0)$,

e) $f_n(x) = \dfrac{x}{1+n^2x}$, $x \in [0,1]$.

Aufgabe 2: Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf gleichmäßige Konvergenz:

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n$, $x \in (-q, q)$, $0 < q < 1$,

b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n$, $x \in (-1, 1)$,

c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}$, $x \in [-1, 1]$,

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (x^n - x^{n-1})$, $x \in [0, 1]$,

e) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, $x \in [a, b]$,

f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 3: Es seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume und $f : X \to Y, f_n : X \to Y, n \in \mathbb{N}$, Abbildungen.

a) Es sei (Y, d_Y) vollständig. Zeigen Sie, dass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann gleichmäßig (gegen f) konvergiert, wenn $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine *gleichmäßige Cauchyfolge* ist, d.h. wenn

$$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, n_0 \in \mathbb{N}\, \forall\, n, m \geq n_0, x \in X :\ d_Y(f_n(x), f_m(x)) < \varepsilon.$$

b) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei punktweise konvergent gegen f sowie eine gleichmäßige Cauchyfolge. Zeigen Sie, dass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen f konvergiert.

Aufgabe 4: Seien I, J Intervalle und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Funktionen $f_n \colon I \to J$, die gleichmäßig gegen eine Funktion $f \colon I \to J$ konvergiert. Weiter sei $g \colon J \to \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig. Zeigen Sie, dass die Folge $(g \circ f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ebenfalls gleichmäßig konvergent ist.

Aufgabe 5: Seien $f_n\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ differenzierbare Funktionen derart, dass die Folge der Ableitungen (f_n') gleichmäßig konvergiert und die Folge (f_n) selbst zumindest in einem Punkt $x_0 \in [a,b]$ konvergent ist. Dann konvergiert die Folge (f_n) gleichmäßig gegen eine differenzierbare Funktion f und die Folge der Ableitungen (f_n') gegen f'.

Aufgabe 6:

a) Überprüfen Sie, ob die folgenden Unterräume von $(\ell_\infty, \|\cdot\|_\infty)$ abgeschlossen - und damit versehen mit der Supremumsnorm Banachräume - sind:

   i) der Raum aller endlichen Folgen: $c_{00} = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid \exists N \in \mathbb{N}\colon \forall n \geq N\colon x_n = 0\}$,

   ii) der Raum aller Nullfolgen: $c_0 = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0\}$,

   iii) der Raum aller konvergenten Folgen: $c = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid \exists a \in \mathbb{R}\colon \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a\}$,

b) Überprüfen Sie, ob der Unterraum $\{f \in C([0,1]) \mid f(0) = f(1) = 0\}$ von $(C([0,1], \|\cdot\|_\infty)$ abgeschlossen - und damit versehen mit der Supremumsnorm ein Banachraum - ist.

Aufgabe 7: Es sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen.

i) $(V, \|\cdot\|)$ ist ein Banachraum.

ii) Für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty$ konvergiert $(\sum_{m=1}^{n} x_m)_{n\in\mathbb{N}}$ in $(V, \|\cdot\|)$.