Prof. Dr. Peter Junghanns
Dr. Ralf Hielscher
PD Dr. Thomas Kalmes

Technische Universität Chemnitz
Fakultät für Mathematik
WS 17/18

Übungen zur Vorlesung Analysis 1

http://www.tu-chemnitz.de/∼ peju/

Übungsblatt 5 - Metrische Räume

Aufgabe 1: Es sei X eine Menge. Zeigen Sie dass durch die Abbildung

$$d : X \times X \to [0, \infty), (x, y) \mapsto \begin{cases} 0, & \text{falls } x = y \\ 1, & \text{falls } x \neq y \end{cases}$$

eine Metrik definiert ist, die sog. *diskrete Metrik*.

Aufgabe 2: Betrachten Sie auf $\mathbb{R}^2 = \{\boldsymbol{x} = (x_1, x_2) \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$ die Metriken

a) $d_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$,

b) $d_2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sqrt{|x_1 - y_1|^2 + |x_2 - y_2|^2}$,

c) $d_\infty(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}$.

Skizzieren Sie die jeweiligen Einheitkugeln $K_1(\mathbf{0}) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 \mid d(\boldsymbol{x}, \mathbf{0}) \leq 1\}$ und zeigen Sie, dass eine Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^2$ genau dann offen bezüglich einer der Metriken d_j ist, wenn sie offen bezüglich aller Metriken d_j ist.

Aufgabe 3: Entscheiden Sie für die folgenden Teilmengen metrischer Räume, ob Sie offen, abgeschlossen oder beschränkt sind. Bestimmen Sie außerdem den Abschluss, das Innere sowie alle Berührungs- und Häufungspunkte.
Zunächst betrachten wir Teilmengen von $(\mathbb{R}, d_2)$:

a) $\emptyset$,
b) $\mathbb{R}$,
c) $\{0\}$,
d) $[0, 1]$,
e) $[0, 1)$,
f) $(0, 1)$,
g) $[1, 3] \setminus \{2\}$,
h) $\mathbb{Q}$,
i) $\mathbb{N}$,
j) $\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Die folgenden Mengen betrachten Sie als Teilmengen von $(\mathbb{R}^2, d_2)$

k) $\{(0, 0)\}$,
l) $\{0\} \times [0, 1]$,
m) $\{0\} \times (0, 1)$,
n) $[0, 1) \times (0, 1)$,
o) $(0, 1) \times (0, 1)$,
p) $(0, 1) \times (0, 1) \setminus \{(0, 0)\}$,
q) $\{(x, \sin \frac{1}{x}) \mid x \in \mathbb{R}_+\}$.

Aufgabe 4: Untersuchen Sie, ob die Menge $(0, 10] \cap X$ in den folgenden metrischen Räumen (X, d_2) bezüglich der euklidischen Metrik offen ist

a) $X = [-10, 10]$, b) $X = (0, 20]$, c) $X = \mathbb{N}$.

Aufgabe 5: Es sei (X, d) ein metrischer Raum. Zeigen Sie die Gültigkeit von

$$|d(x, z) - d(y, w)| \leq d(x, y) + d(z, w), \quad x, y, z, w \in X$$

und

$$|d(x, z) - d(y, z)| \leq d(x, y), \quad x, y \in X\,.$$

Aufgabe 6: Sei (X, d) ein metrischer Raum und $A \subset X$ eine Teilmenge. Dann heißt x Randpunkt von A, falls er sowohl Berührungspunkt von A als auch von $X \setminus A$ ist. Die Menge aller Randpunkte von A bezeichnen wir mit ∂A. Zeigen Sie:

a) $\partial A = \partial(X \setminus A)$, b) $\partial A = \overline{A} \setminus \overset{\circ}{A}$,

Aufgabe 7: Gibt es Mengen ohne Rand?

Aufgabe 8: Es sei (X, d) ein metrischer Raum sowie $A \subset X$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

a) $\operatorname{int}(A) = \bigcup_{\substack{B \subset A: \\ B \text{ offen in } (X,d)}} B$, b) $\overline{A} = \bigcap_{\substack{B \supset A: \\ B \text{ abgeschlossen in } (X,d)}} B$.

Folgern Sie, dass das Innere einer jeden Menge offen und der Abschluss sowie der Rand einer jeden Menge abgeschlossen ist. Folgern Sie ferner, dass für $A_1 \subset A_2 \subset X$ sowohl $\operatorname{int}(A_1) \subset \operatorname{int}(A_2)$ als auch $\overline{A_1} \subset \overline{A_2}$ gelten.

Aufgabe 9: Es sei (X, d) ein metrischer Raum und $x_0 \in X$. Zeigen Sie, dass x_0 genau dann ein isolierter Punkt ist, falls $\{x_0\}$ offen ist.

Aufgabe 10: Es sei (X_0, d) ein Teilraum des metrischen Raumes (X, d). Zeigen Sie, dass $A_0 \subset X_0$ genau dann in (X_0, d) offen (bzw. abgeschlossen) ist, wenn eine in (X, d) offene (bzw. abgeschlossene) Menge A mit $A_0 = X_0 \cap A$ existiert.

Aufgabe 11: Es sei (X, d) ein metrischer Raum und $X_0 \subset X$. Beweisen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

i) X_0 ist zusammenhängend,

ii) $\forall\, U, V \subset X$ offen : $\big(X_0 \subset U \cup V, X_0 \cap U \cap V = \emptyset \Rightarrow X_0 \cap U = \emptyset$ oder $X_0 \cap V = \emptyset\big)$.

Hausaufgaben

Abgabe Mo, 18.12.2017

Aufgabe 1: Sei $d\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$ eine Metrik auf $\mathbb{R}^2$. Zeigen Sie, dass 4 Punkte

$$\tilde{d}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \begin{cases} d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}), & \text{falls } \boldsymbol{y} = t \cdot \boldsymbol{x} = (t\,x_1, t\,x_2) \text{ für ein } t \in \mathbb{R}, \\ d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{0}) + d(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{0}), & \text{sonst} \end{cases}$$

ebenfalls eine Metrik auf $\mathbb{R}^2$ definiert.
Setzen Sie $d = d_2$ (s. Aufgabe 2 dieses Übungsblatts) und skizzieren für $\boldsymbol{x} = (1, 1)$ sie den Ball $K_2(\boldsymbol{x})$. Interpretieren Sie diese Metrik.

Aufgabe 2: Sei (X, d) ein metrischer Raum. Zeigen sie, dass mit 6 Punkte

$$\tilde{d}(x, y) := \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)} \text{ und } \hat{d}(x, y) := \min\{d(x, y), 1\} \quad x, y \in X$$

zwei weitere Metriken auf X definiert sind. Zeigen Sie außerdem, dass eine Teilmenge $A \subset X$ die folgenden Aussagen äquivalent sind:

i) A ist offen in (X, d),

ii) A ist offen in $(X, \tilde{d})$,

iii) A ist offen in $(X, \hat{d})$.

Aufgabe 3: Zeigen Sie, dass jede Teilmenge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ sowohl offen als auch abgeschlossen in $(\mathbb{N}, d_2)$ ist, wobei d_2 wie üblich die euklidische Metrik bezeichnet. 2 Punkte

Aufgabe 4: Es sei (X, d) ein metrischer Raum und $Y, Z \subset X$ zusammenhängende Teilmengen. Zeigen Sie, dass $Y \cup Z$ zusammenhängend ist, falls $Y \cap Z \neq \emptyset$. Kann hierbei auf die Voraussetzung „$Y \cap Z \neq \emptyset$“ verzichtet werden? (Beweis oder Gegenbeispiel!) 4 Punkte