Prof. Dr. Peter Junghanns
Dr. Ralf Hielscher
Prof. Dr. Thomas Kalmes

Technische Universität Chemnitz
Fakultät für Mathematik
SS 18

Übungen zur Vorlesung Analysis 2

http://www.tu-chemnitz.de/∼ peju/

Übungsblatt 4 - Extremwertaufgaben und Kurvendiskussion

Aufgabe 1: Zeigen Sie: Ist $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar, so gilt

$$f''(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}\,.$$

Aufgabe 2: Untersuchen Sie die Funktionen $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , x = 0 \\ e^{-x^{-2}} & , x \neq 0 \end{cases} \quad \text{und} \quad g(x) = \begin{cases} 0 & , x = 0 \\ xe^{-x^{-2}} & , x \neq 0 \end{cases}$$

auf lokale Extrema.

Aufgabe 3: Es seien $a, b \in \mathbb{R}_+$. Welches in die Ellipse $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\}$ einbeschriebene achsenparallele Rechteck besitzt den größten Flächeninhalt?

Aufgabe 4: Bestimmen Sie für $a > 0$ und folgende Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Unstetigkeitsstellen, Nullstellen, Nichtdifferenzierbarkeitspunkte, Extremwerte, Wendepunkte, Monotonieintervalle, Konvexitäts- und Konkavitätsintervalle und Intervalle mit Vorzeichenkonstanz sowie evtl. Asymptoten, das Periodizitäts- und Symmetrieverhalten:

a) $f(x) = \begin{cases} \frac{(x-1)(x^2+1)}{x^2-1}, & |x| \neq 1 \\ 1, & |x| = 1, \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} 0, & x = \frac{(2k+1)\pi}{4}\,,\ k \in \mathbb{Z} \\ \frac{\cos x}{\cos 2x}, & \text{sonst} \end{cases}$

Aufgabe 5: Es seien $f\colon [a,b] \to [c,d]$ und $g\colon [c,d] \to \mathbb{R}$ zwei konvexe Funktionen.

a) Zeigen Sie: Ist g monoton wachsend, so ist auch die Funktion $g \circ f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ konvex.

b) Ist die Monotoniebedingung an g notwendig?

Aufgabe 6: Es seien $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ stetig, $f(0) = 0$ und $f'\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ monoton wachsend. Zeigen Sie, dass dann auch $g\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^{-1}f(x)$ monoton wachsend ist.

Aufgabe 7: Die Legendre-Polynome $P_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind definiert durch

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n.$$

Zeigen Sie:

a) Das Legendre-Polynom P_n ist ein Polynom vom Grad n.

b) Die Legendre-Polynome erfüllen die Differentialgleichung

$$(1-x^2)P_n''(x) - 2xP_n'(x) + n(n+1)P_n(x) = 0.$$

c) Zeigen Sie, dass die Legendre-Polynome $P_n(x)$ nur reelle und einfache Nullstellen besitzen, die sämtlich im Intervall $(-1,1)$ liegen.

Hausaufgaben

Abgabe 24.05.2018

Aufgabe 1: Bestimmen Sie alle Extrema der Funktion $f : [2,\infty) \to \mathbb{R}$, 2 Punkte

$$f(x) = (x+2)^{\frac{2}{3}} - (x-2)^{\frac{2}{3}}.$$

Aufgabe 2: Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall. Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ heißt konvex, falls für alle $x_1, x_2 \in I$ und $\lambda \in [0,1]$ gilt $f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$. 4 Punkte

a) Zeigen Sie, dass $f : I \to \mathbb{R}$ genau dann konvex ist, wenn für jedes $x \in I$ die Funktion

$$\{h \in \mathbb{R}\backslash\{0\};\, x+h \in I\} \to \mathbb{R}, \quad h \mapsto \frac{f(x+h)-f(x)}{h},$$

monoton nicht fallend ist.

b) Es seien $f : I \to \mathbb{R}$ konvex und $x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2$, innere Punkte von I. Verwenden Sie a), um zu zeigen, dass die einseitigen Ableitungen

$$f_l'(x_1) := \lim_{x \to x_1 -} \frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \text{ und } f_r'(x_1) := \lim_{x \to x_1 +} \frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}$$

existieren und dass

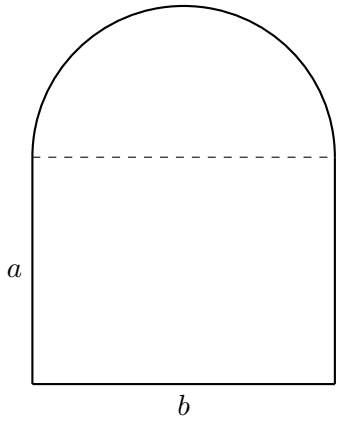
$$f_l'(x_1) \leq f_r'(x_1) \leq \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leq f_l'(x_2) \leq f_r'(x_2)$$

gilt. (Insbesondere ist f damit Lipschitz-stetig auf jedem kompakten Teilintervall $[a,b] \subseteq I$ und stetig in I.)

Aufgabe 3: Bestimmen Sie im Intervall $[0,\pi]$ alle Teilintervalle, in denen $f(x) = \frac{1}{8}\cos^2 x$ konvex ist. 2 Punkte

Aufgabe 4: Bestimmen Sie für $a > 0$ und folgende Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Unstetigkeitsstellen, Nullstellen, Nichtdifferenzierbarkeitspunkte, Extremwerte, Wendepunkte, Monotonieintervalle, Konvexitäts- und Konkavitätsintervalle und Intervalle mit Vorzeichenkonstanz sowie evtl. Asymptoten, das Periodizitäts- und Symmetrieverhalten: 4 Punkte

a) $f(x) = \begin{cases} 0, & x \in (0, a] \\ \sqrt{\frac{x^3}{x-a}}, & \text{sonst} \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} \frac{(x+1)^3}{(x-1)^2}, & x \neq 1 \\ 0, & x = 1. \end{cases}$

Aufgabe 5: Ein Gewölbegang hat einen Querschnitt von der Form eines Rechtecks (mit den Kantenlängen a und b) mit einem aufgesetzten Halbkreis (mit Durchmesser b). Der Umfang des Gewölbegangs sei mit $U = 10$ vorgegeben. Wie ist der Gewölbegang zu gestalten, damit der Querschnitt einen möglichst großen Inhalt hat? 2 Punkte