Prof. Dr. Peter Junghanns
Dr. Ralf Hielscher
PD Dr. Thomas Kalmes

Technische Universität Chemnitz
Fakultät für Mathematik
WS 17/18

Übungen zur Vorlesung Analysis 1

http://www.tu-chemnitz.de/∼ peju/

Übungsblatt 4 - Binomialkoeffizienten

Aufgabe 1: Schreiben Sie den Term $(x-y)^5$ nach der binomischen Formel als Summe von Potenzen in x und y!

Aufgabe 2: Berechnen Sie den Koeffizienten vor a^{15} in $(1+a)^{20}$.

Aufgabe 3: Zeigen Sie, dass für alle $n, k \in \mathbb{N}_0$ mit $n \geq k$ gilt

$$\sum_{m=k}^{n} \binom{m}{k} = \binom{n+1}{k+1}.$$

Aufgabe 4: Zeigen Sie:

a) $\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \ldots + (-1)^n \binom{n}{n} = 0$, $n \in \mathbb{N}$

b) $(1+\lambda)^n > \frac{n^2}{4}\lambda^2$, $\lambda > 0$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$

Aufgabe 5: Zeigen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ die Gültigkeit der Aussagen:

a) $2^{n-1} \leq n!$

b) $\frac{n^k}{k!} \geq \binom{n}{k}$

c) $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} < 3$

Aufgabe 6:

a) Zeigen Sie für $n, k \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2k$, dass $\binom{n}{k+1} \geq \frac{1}{(k+1)!}\left(\frac{n}{2}\right)^{k+1}$ gilt.

b) Zeigen Sie, dass für $n, k \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2k$ und $x > 0$ die Ungleichung

$$(1+x)^n \geq \frac{x^{k+1}}{(k+1)!}\left(\frac{n}{2}\right)^{k+1}$$

gilt.

Aufgabe 7: Drücken Sie $\cos(n\varphi)$ und $\sin(n\varphi)$, $n \in \mathbb{N}$, $\varphi \in \mathbb{R}$ in Potenzen von $\cos\varphi$ und $\sin\varphi$ aus.

Hausaufgaben

Abgabe Mo, 27.11.2017

Aufgabe 1: Beweisen Sie, dass für alle natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}_0$ gilt 2 Punkte

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n.$$

Aufgabe 2: Beweisen Sie für alle natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$ die Ungleichung 2 Punkte

$$\left(\frac{n}{3}\right)^n \leq \frac{1}{3}n!$$

gilt.

Aufgabe 3 (Arithmetisches, geometrisches und harmonisches Mittel): 5 Punkte
Zeigen Sie für alle natürlchen Zahlen $n \in \mathbb{N}$ und alle reellen Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_n > 0$ die Ungleichung

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}} \leq \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$$

(harm. M. $\leq$ geom. M. $\leq$ arithm. M.). Gehen Sie dazu wie folgt vor:

a) Zeigen Sie die Ungleichung für den Fall $n = 2$, d.h., dass für alle reellen Zahlen $x, y > 0$ gilt

$$\frac{2}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}} \leq \sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}\ .$$

b) Zeigen Sie, dass die Ungleichung zwischen geometrischem und arithmetischem Mittel die Ungleichung zwischen harmonischem und geometrischem Mittel impliziert.

c) Zeigen, dass es ausreicht, die Ungleichung zwischen geometrischem und arithmetischem Mittel für den Fall $x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n = 1$ zu beweisen.

d) Beweisen die Ungleichung zwischen geometrischem und arithmetischem Mittel für den Fall $x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n = 1$ mittels vollständiger Induktion.