Prof. Dr. Peter Junghanns
Dr. Ralf Hielscher
PD Dr. Thomas Kalmes

Technische Universität Chemnitz
Fakultät für Mathematik
WS 17/18

Übungen zur Vorlesung Analysis 1

http://www.tu-chemnitz.de/∼ peju/

Übungsblatt 3 - Der Körper der komplexen Zahlen

Aufgabe 1: Berechnen Sie den Real- und Imaginärteil folgender komplexer Zahlen:

a) $(2+3\mathbf{i})(3-2\mathbf{i})$,

b) $(1+\mathbf{i})^3$,

c) $(1+2\mathbf{i})^6$,

d) $\frac{1}{\mathbf{i}}$,

e) $\dfrac{1+\mathbf{i}}{1-\mathbf{i}}$,

f) $\dfrac{a+b\mathbf{i}}{a-b\mathbf{i}}$, $a,b\in\mathbb{R}$,

g) $\mathbf{i}^k$, $k\in\mathbb{Z}$,

h) $\left(\frac{1+\mathbf{i}}{\sqrt{2}}\right)^k$, $k\in\mathbb{Z}$.

Aufgabe 2: Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil sowie den Betrag und den Hauptwert des Arguments folgender komplexer Zahlen:

a) $\overline{z}$,

b) $\frac{1}{\overline{z}}$,

c) z^2,

d) $\mathbf{i}z$,

e) $z\overline{z}$,

f) $z+\overline{z}$

g) $\left|\dfrac{z}{\overline{z}}\right|$,

h) $\frac{1}{1-z}$ für $z\neq 1$.

Aufgabe 3: Stellen Sie folgende komplexe Zahlen in trigonometrischer Form dar:

a) $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{i}$,

b) $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\mathbf{i}$,

c) $\sin\alpha+\mathbf{i}(1-\cos\alpha)$, $\alpha\in[-\pi,\pi)$,

d) $1+\cos\dfrac{\pi}{4}+\mathbf{i}\sin\dfrac{\pi}{4}$.

Aufgabe 4: Berechnen Sie mit Hilfe der Formel von Moivre

a) $(1+\mathbf{i})^{10}$, b) $(1-\mathbf{i}\sqrt{3})^6$, c) $(-1+\mathbf{i})^5$, d) $(\sqrt{3}+\mathbf{i})^3$, e) $(\sqrt{3}+\mathbf{i})^9$.

Aufgabe 5: Bestimmen Sie alle Lösungen der folgender Gleichungen:

a) $z^2=\mathbf{i}$,

b) $z^2=-\mathbf{i}$,

c) $z^3+1=0$,

d) $z^2=4-3\mathbf{i}$,

e) $z^2+2\mathbf{i}z=5$,

f) $z^6=2+\mathbf{i}$.

Aufgabe 6: Zerlegen Sie folgende Polynome sowohl in komplexe Linearfaktoren als auch in reelle Linear- und (wenn nötig) quadratische Faktoren:

a) $z^4 + 1$, b) $z^3 + 1$, c) $z^4 - 16$.

Aufgabe 7: Es sei $p(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ ein Polynom mit reellen Koeffizienten $a_k \in \mathbb{R}$ und einer Nullstelle in $z_0 \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass dann auch $\overline{z_0}$ eine Nullstelle von p ist.

Aufgabe 8: Zeigen Sie, dass Real und Imaginärteil der komplexen Zahl 2 Punkte

$$z = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} + \frac{1 + 2\sqrt{2}}{1 - \sqrt{2}}\mathbf{i}$$

irrational sind. Sie können verwenden, dass $\sqrt{2}$ und $\sqrt{3}$ irrational sind.

Hausaufgaben

Abgabe Mo, 20.11.2017

Aufgabe 1: Berechnen Sie den Real- und Imaginärteil sowie den Betrag und den Hauptwert des Arguments folgender komplexer Zahlen: 3 Punkte

a) $1 + \mathbf{i}$, b) $\frac{(1+\mathbf{i})^{10}}{(1-\mathbf{i})^8}$, c) $e^{-\mathbf{i}\pi/4}$.

Aufgabe 2: Zeigen Sie für $z, w \in \mathbb{C}$ mit $|z| = |w| = 1$ gilt 3 Punkte

a) $z^{-1} = \overline{z}$, b) $|zw| = 1$, c) $|z/w| = 1$.

Aufgabe 3: Bestimmen Sie die folgenden Mengen komplexer Zahlen und skizzieren Sie diese in der komplexen Zahlenebene 2 Punkte

a) $M_1 = \left\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}\left(\frac{\mathbf{i}+z}{\mathbf{i}-z}\right) = 0\right\}$, b) $M_2 = \{z \in \mathbb{C} \mid \frac{\mathbf{i}+z}{\mathbf{i}-z} \in \mathbb{R}\}$.

Aufgabe 4: 5 Punkte

a) Finden Sie ein $\alpha > 0$ so dass gilt $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = (z^2 - \alpha z + 1)(z^2 + \alpha^{-1} z + 1)$.

b) Zeigen Sie, α erfüllt die Eigenschaft des golden Schnittes $\frac{1}{\alpha} = \frac{\alpha}{1-\alpha}$.

c) Finden Sie eine Lösung der Gleichung $z^5 = 1$.

d) Berechnen Sie Real- und Imaginärteil aller Lösungen der Gleichung

$$z^5 = 1.$$

e) Welche Figur bilden diese Lösungen und welche Abschnitte liegen zueinander im goldenen Schnitt?