Prof. Dr. Peter Junghanns
Dr. Ralf Hielscher
Prof. Dr. Thomas Kalmes

Technische Universität Chemnitz
Fakultät für Mathematik
SS 18

Übungen zur Vorlesung Analysis 2

http://www.tu-chemnitz.de/∼ peju/

Übungsblatt 2 - Differenzierbarkeit

Aufgabe 1: Untersuchen Sie mit Hilfe der Definition folgende Funktionen auf Differenzierbarkeit und geben Sie gegebenenfalls die Ableitung an:

a) $f(x) = \dfrac{1}{ax+b}$, $(a \neq 0)$, $x \neq -\frac{b}{a}$

b) $f(x) = \sqrt{|x|}$,

Aufgabe 2: Bestimmen Sie die 1. Ableitung folgender Funktionen (an den Stellen, wo die Funktionen differenzierbar ist) und vereinfachen Sie soweit wie möglich:

a) $f(x) = \sin x$,

b) $f(x) = \arctan x$,

c) $f(x) = x^x$,

d) $f(x) = \sinh x$,

e) $f(x) = \sinh^{-1} x$,

f) $f(x) = x^3(x^2-1)^2$,

g) $f(x) = \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}$,

h) $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+a^2})$,

i) $f(x) = a^{(a^x)}$ $(a > 0)$,

Aufgabe 3: Berechnen Sie die n-te Ableitung der folgenden Funktionen

a) $f(x) = e^{-ax}$,

b) $f(x) = \ln x^2$.

Aufgabe 4: Beweisen Sie die Ungleichungen

a) $|\arctan x - \arctan y| \leq |x-y|$,

b) $\ln(x) > 1 - \frac{1}{x}$, $x > 1$,

c) $\ln(1+x) < x$, $x > 0$.

Aufgabe 5: Zeigen Sie für $n \in \mathbb{N}$:

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} < \ln(1+n) < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$,

b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k} = \ln 2$.

Aufgabe 6: Bestimmen Sie den Konvergenzradius r der Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 z^n$ und berechnen Sie $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 z^n$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < r$.

Hausaufgaben

Abgabe 26.04.2018

Aufgabe 1: Untersuchen Sie mit Hilfe der Definition folgende Funktionen auf Differenzierbarkeit, und geben Sie gegebenenfalls die Ableitung an: 2 Punkte

a) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$,

b) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2^{|x|}$.

Aufgabe 2: Bestimmen Sie die 1. Ableitung folgender Funktionen (an den Stellen, wo die Funktionen differenzierbar sind) und vereinfachen Sie soweit wie möglich: 9 Punkte

a) $f(x) = \arcsin x$,

b) $f(x) = \cosh x$,

c) $f(x) = \tanh^{-1} x$,

d) $f(x) = \dfrac{x}{1-x^2}$,

e) $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$,

f) $f(x) = 2^{\sin 3x}$,

g) $f(x) = \ln \frac{x^2-1}{x^2+1}$,

h) $f(x) = \arctan \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$,

i) $f(x) = x^{\sin x}$.

Aufgabe 3: Beweisen Sie die Ungleichung 2 Punkte

$$|\cos e^x - \cos e^y| \leq |x - y|\,,\ x, y < 0.$$

Aufgabe 4: Seien $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ und $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zwei differenzierbare Funktionen. Bestimmen Sie die Ableitung der Funktion $h(x) = f(x)^{g(x)}$. 2 Punkte

Aufgabe 5: Berechnen Sie die n-te Ableitung der folgenden Funktionen 2 Punkte

a) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = a^x$,

b) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|^3$.

Aufgabe 6: Beweisen oder widerlegen Sie: Eine differenzierbare Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist genau dann Lipschitz-stetig, falls sie gleichmäßig stetig ist. 2 Punkte