Prof. Dr. Peter Junghanns
Dr. Ralf Hielscher
PD Dr. Thomas Kalmes

Technische Universität Chemnitz
Fakultät für Mathematik
WS 17/18

Übungen zur Vorlesung Analysis 1

http://www.tu-chemnitz.de/∼ peju/

Übungsblatt 2 - (Geordnete) Körper und vollständige Induktion

Aufgabe 1: Beweisen Sie ausgehend vom Distributivgesetz der ganzen Zahlen das Distributivgesetz der rationalen Zahlen.

Aufgabe 2: Überprüfen Sie, ob die Menge $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ mit den Operationen

- $x + \infty = \infty$
- $\infty + \infty = \infty$
- $x \cdot \infty = \infty$
- $\infty \cdot \infty = \infty$

ein Körper ist.

Aufgabe 3: Überprüfen Sie, ob folgende Operationen einen Körper auf der Menge $\{0, 1\}$ definieren.

$+$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

Aufgabe 4: Wiederholen Sie die Definition eines Körpers K und zeigen Sie für $a, b, c \in K$,

a) $a \cdot b = a \cdot c \wedge a \neq 0 \implies b = c$,

b) $a \cdot b = a \implies b = 1$,

c) $a \cdot b = 1 \iff b = a^{-1}$,

d) $a \neq 0 \implies (a^{-1})^{-1} = a$,

e) $a \cdot 0 = 0$,

f) $a \cdot b = 0 \iff a = 0 \vee b = 0$,

g) $a(-b) = -(ab)$,

h) $(-a)(-b) = ab$.

Aufgabe 5: Beweisen Sie ausgehend von den Eigenschaften (O3) und (O4) eines *geordneten Körpers* K die Aussagen (d) und (e) des Satzes 1.4 der Vorlesung, d.h., zeigen Sie für $a, b \in K$:

a) $a \neq 0 \implies a^2 > 0$,

b) $0 < a < b \iff 0 < b^{-1} < a^{-1}$.

Vervollständigen Sie unter Verwendung dieser Aussagen den Beweis von Satz 1.4, (b) und (c) aus der Vorlesung.

Aufgabe 6: Beweisen Sie durch vollständige Induktion

a) $\forall\, n \in \mathbb{N}, n \geq 5 :\ 2^n > n^2$,

b) $\forall\, n \in \mathbb{N} :\ \dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2n} < \dfrac{1}{\sqrt{n}}$,

c) $\forall\, n \in \mathbb{N} :\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$,

d) $\forall\, n \in \mathbb{N} :$

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3},$$

e) $\forall\, n \in \mathbb{N} :$

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4},$$

f) Geben Sie für festes $m \in \mathbb{N}$ eine Vermutung über den Wert von

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1) \cdot \ldots \cdot (k+m-1)$$

an und beweisen Sie diese.

Aufgabe 7: Beweisen Sie mit vollständiger Induktion:

a) $\forall\, n \in \mathbb{N} :\ 11^{n+1} + 12^{2n-1}$ ist durch 133 teilbar.

b) $\forall\, n \in \mathbb{N} :\ n^3 - 7n$ ist durch 6 teilbar.

Aufgabe 8: Zeigen Sie mit vollständiger Induktion, dass jede natürliche Zahl $n \geq 2$ einen Primteiler besitzt!

Aufgabe 9: Zeigen Sie mit vollständiger Induktion, dass

$$\prod_{k=1}^{n} k^k \leq n^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Aufgabe 10: Ist $p \geq 2$ eine natürliche Zahl, so gilt $p^n > n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Hausaufgaben

Abgabe Mo, 6.11.2017

Aufgabe 1: Zeigen Sie ausgehend von den Körperaxiomen und den Schlussfolgerungen (a) bis (i) aus Satz 1.3 der Vorlesung, dass für alle Elemente a, b, c eines Körpers K gilt 2 Punkte

$$a(b-c) = ab - ac.$$

Aufgabe 2: Überprüfen Sie, ob folgende Operationen einen Körper auf der Menge $\{0,1,2\}$ definieren. 2 Punkte

$+$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

$\cdot$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

Aufgabe 3: Überprüfen Sie, ob die Menge $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\}$ mit den Operationen 1 Punkt

$$(x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2), \quad (x_1, y_1) \otimes (x_2, y_2) = (x_1 x_2, y_1 y_2)$$

ein Körper ist.

Aufgabe 4: 2 Punkte

a) Seien a, b, c, d positive Zahlen mit $\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d}$. Zeigen Sie:

$$\frac{a}{b} \leq \frac{a+c}{b+d} \leq \frac{c}{d}.$$

b) Gibt es positive reelle Zahlen a, b, c, d mit

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}\,?$$

Aufgabe 5: Beweisen Sie durch vollständige Induktion: je 2 Punkte

a) $\forall\, n \in \mathbb{N} : \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$,

b) $\forall\, n \in \mathbb{N} \forall\, x \in \mathbb{R} \backslash \{m\pi : m \in \mathbb{Z}\} : \sum_{k=1}^{n} \cos\big((2k-1)x\big) = \frac{\sin(2nx)}{2\sin(x)}$.

Aufgabe 6: Für welche $n \in \mathbb{N}$ gilt je 2 Punkte

a) $2^n > 2n + 1$,

b) $1 \leq \frac{9}{n^2 - 8n}$?

Aufgabe 7: Die Fibonacci-Zahlen sind rekursiv definiert durch $f_0 := 0$, $f_1 := 1$ und $f_n := f_{n-1} + f_{n-2}$ für $n \geq 2$. Beweisen Sie die explizite Darstellung 2 Punkte

$$\forall\, n \in \mathbb{N} : \; f_n = \frac{\varphi^n - \phi^n}{\varphi - \phi} \text{ mit } \varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \phi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Aufgabe 8 (Zusatzaufgabe): Zeigen Sie, dass in einem Körper immer gilt 1 Punkt

$$0 = -0.$$