Prof. Dr. Peter Junghanns
Dr. Ralf Hielscher
Prof. Dr. Thomas Kalmes

Technische Universität Chemnitz
Fakultät für Mathematik
SS 18

Übungen zur Vorlesung Analysis 2

http://www.tu-chemnitz.de/∼ peju/

Übungsblatt 1 - Reihen

Aufgabe 1: Untersuchen Sie die Reihe

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{2^5}+\frac{1}{3^6}+\dots$$

mit dem Quotienten- und dem Wurzelkriterium.

Aufgabe 2: Es seien $a_n, b_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und es existiere der Grenzwert $q = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n}$. Beweisen Sie folgende Vergleichskriterien:

a) Ist $q < \infty$, so folgt aus der Konvergenz von $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ die Konvergenz von $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

b) Ist $q > 0$, so folgt aus der Konvergenz von $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ die Konvergenz von $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$.

Aufgabe 3: Untersuchen Sie folgende Reihen auf Konvergenz:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}}$

b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}}$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\arctan n)^n}{2^n}$

d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+(-1)^n n^2}{2+n^2}$

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2 5^n}{(2n)!}$

f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{10}}{10^n}$

g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (\sqrt[n]{3}-1)$

h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left[\left(n+\frac{1}{n}\right)\pi\right]$

i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}}$

Aufgabe 4: Bestimmen Sie den Konvergenzradius folgender Potenzreihen

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+2}{2^n} z^n$,

b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2+z)^{2n}}{(2+\frac{1}{n})^n}$.

Aufgabe 5: Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die Potenzreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left(\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2+1} \right)^n (x+1)^n \, ?$$

Aufgabe 6: Beweisen Sie: Sind $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reelle Zahlenfolgen, für die die Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2$ und $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^2$ konvergieren, so konvergieren auch die Reihen

a) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \,,$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)^2 \,,$ c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n} \,.$

Aufgabe 7: Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Zahlenfolge mit $a_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lim_{n\to\infty} a_n = a \neq 0$. Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} |a_{n+1} - a_n|$ genau dann konvergiert, wenn die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} |a_{n+1}^{-1} - a_n^{-1}|$ konvergiert.

Aufgabe 8: Zeigen Sie, dass das Cauchy-Produkt der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ mit sich selbst divergent ist.

Hausaufgaben

Abgabe Mo, 16.04.2018

Aufgabe 1: Überprüfen Sie für $\alpha \in \mathbb{R}$ folgende Reihen auf Konvergenz 9 Punkte

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{2n^3-1}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^n}}{n!}$

f) $\sum_{n=13}^{\infty} \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right)^n$

g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}$

h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\alpha}{n^2}$

i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\alpha}{n}$.

Aufgabe 2: Berechnen Sie die Summen folgender Reihen 4 Punkte

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{4^n}$,

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1}$.

Aufgabe 3: Einem Quadrat mit der Seitenlänge 1 wird ein Kreis, diesem ein Quadrat, dem wiederum ein Kreis usw. einbeschrieben. Das Verfahren denke man sich unendlich oft fortgesetzt. Wie lautet die Summe 4 Punkte

a) der Umfänge aller Quadrate und Kreise,

b) der Flächen aller Quadrate und Kreise?

Aufgabe 4: Bestimmen Sie den Konvergenzradius folgender Potenzreihen 4 Punkte

a) $\sum_{n=1}^{\infty} nz^{n-1}$

b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{n+2}}{2^n} z^n$,

c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(n+(-1)^n)!}$,

d) $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} z^n$.

Aufgabe 5: Sei $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Nullfolge. Laut Leibniz-Kriterium existiert der Grenzwert $s = \lim_{n\to\infty} s_n$ der Partialsummen 2 Punkte

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} b_k.$$

Zeigen Sie $|s_n - s| \leq b_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 6: Beweisen Sie: Ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent, so konvergiert auch $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p$ für alle $p > 1$. Gilt auch die Umkehrung? 2 Punkte

Aufgabe 7: Es sei $b_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$. Konvergiert dann die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} b_n$? 2 Punkte