Prof. Dr. Peter Junghanns
Dr. Ralf Hielscher
PD Dr. Thomas Kalmes

Technische Universität Chemnitz
Fakultät für Mathematik
WS 17/18

Übungen zur Vorlesung Analysis 1

http://www.tu-chemnitz.de/∼ peju/

Übungsblatt 1 - Mengen, Logik

Aufgabe 1: Geben Sie folgende Mengen mit Hilfe ihrer Grundmenge und der Eigenschaft ihrer Elemente an:

a) $M_1 = \{2, 4, 6, 8, 10, \cdots\}$,

b) $M_2 = \{1, 4, 9, 16, 25, \cdots\}$,

c) $M_3 = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \cdots\}$,

d) $M_4 = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{24}, \frac{1}{120}, \cdots\}$.

Aufgabe 2: Geben Sie alle Teilmengen der Menge $M = \{1, 2, 3\}$ an!

Aufgabe 3: Wie viele Teilmengen hat eine endliche Menge M?

Aufgabe 4: Seien A, B, C Mengen. Zeigen Sie:

a) $A = (A \cap B) \cup (A \setminus B)$,

b) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$,

c) $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$, wobei $A \triangle B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$,

d) $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$.

Aufgabe 5: Für $t > 0$ sei $M_t = \{x \in \mathbb{R} \,:\, 0 < x \leq t\}$. Bestimmen Sie

a) $\bigcup\limits_{0<t\leq 1} M_t$,

b) $\bigcap\limits_{0<t\leq 1} M_t$,

c) $\bigcup\limits_{0<t<1} M_t$.

Aufgabe 6: Sei I eine beliebige Indexmenge und $\{M_\alpha\}_{\alpha\in I}$ ein Mengensystem mit $M_\alpha \subset E$ für alle $\alpha \in I$. Zeigen Sie

$$\bigcap_{\alpha\in I} M_\alpha^c = \left(\bigcup_{\alpha\in I} M_\alpha\right)^c,$$

wobei M_α^c die Komplementärmenge von M_α (bzgl. E) bezeichnet, d.h. $M_\alpha^c = E \setminus M_\alpha$.

Aufgabe 7: Seien A, B, C, D Mengen. Gilt

$$(A \cap B) \setminus (C \cap D) = (A \setminus C) \cap (B \setminus D)\,?$$

Aufgabe 8: Skizzieren Sie die folgenden Mengen:

a) $M_1 = \{x \in \mathbb{R} \colon |x-3| < 2\}$,

b) $M_2 = \{x \in \mathbb{R} \colon |x+2| - |x-3| \leq 3\}$,

c) $M_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 = 1\}$,

d) $M_4 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon \max(|x|, |y|) \leq 1\}$.

Aufgabe 9: Sind die folgenden Aussagen wahr? Was ist jeweils ihr Gegenteil?

a) $3 < 4 \wedge 4 < 3$,

b) $3 < 4 \vee 4 < 3$,

c) $3 < 4 \wedge \neg(4 < 3)$,

d) $3 < 4 \vee$ Der Mond ist aus Käse,

e) $\forall n \in \mathbb{N} \colon n^2 \in \mathbb{N}$,

f) $\forall x \in \mathbb{N} \quad \exists y \in \mathbb{N} : x = y + 1$,

g) $\forall x \in \mathbb{N} \quad \exists y \in \mathbb{N} : y = x + 1$,

h) $\exists y \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \mathbb{N} : x = y + 1$,

i) Wenn meine Großmutter Räder hätte, wäre sie ein Autobus

j) Für alle reellen Zahlen x gilt $3 < x \Leftrightarrow \neg(x < 3)$.

Aufgabe 10: Beweisen Sie mithilfe der Wahrheitswerttabelle den Satz von der Kontraposition (Prinzip des indirekten Beweises): $(p \Rightarrow q) \Longleftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$!

Aufgabe 11: Es gelte die folgende Implikation:

$$\{\text{Die Ware ist verdorben.}\} \Rightarrow \{\text{Die Ware darf nicht verkauft werden.}\}$$

Welche Folgerungen können getroffen werden, wenn folgende Aussagen wahr sind:

a) Die Ware ist verdorben.

b) Die Ware darf verkauft werden.

c) Die Ware ist nicht verdorben.

d) Die Ware darf nicht verkauft werden.

Aufgabe 12: Nutzen Sie die Implikation $a = b \Rightarrow a^2 = b^2$ zur Lösung der Gleichung $\sqrt{x+2} - x = 0$!

Aufgabe 13: Sei M die Menge der Menschen und H die Menge der Hunde. Negieren Sie $\forall h \in H \quad \exists m \in M : (m \text{ füttert } h \wedge m \text{ führt } h \text{ Gassi})$.

Aufgabe 14: Seien A und B zwei Aussagen (etwa „$x > 2$“ und „$x > 1$“ für reelle x). Schreiben Sie $A \Rightarrow B$ ohne den Folgepfeil nur mit den logischen Symbolen „nicht“, „und“ und „oder“ ($\neg$, $\wedge$ und $\vee$).

Hausaufgaben

Abgabe in der Vorlesung: Mo, 23.10.2017

Aufgabe 1: Skizzieren Sie die folgenden Mengen in der (x, y)-Ebene: 2 Punkte

a) $M_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq 1\}$,

b) $M_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |y| \leq |x| \text{ und } |y - 2| < 1\}$.

Aufgabe 2: Seien A, B, C Mengen. Zeigen Sie $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus C$. 2 Punkte

Aufgabe 3: Für $t > 0$ sei $M_t = \{x \in \mathbb{R} \, : \, 0 < x \leq t\}$. Bestimmen Sie 4 Punkte

a) $\bigcap_{1 \leq t < 2} M_t$, b) $\bigcap_{0 < t < 1} M_t$.

Aufgabe 4: Zeigen Sie unter den selben Voraussetzungen wie in Aufgabe 6 des Übunsgblattes, 4 Punkte

$$\bigcup_{\alpha \in I} M_\alpha^c = \left(\bigcap_{\alpha \in I} M_\alpha \right)^c .$$

Aufgabe 5: Beweisen Sie mithilfe einer Wahrheitswerttabelle 4 Punkte

a) das Prinzip der Transitivität: $\big((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)\big) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$,

b) die Äquivalenz: $\neg(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge \neg q)$.

Aufgabe 6: Eines sonnigen Tages kommt die Katze der Dorflehrerin nach Hause, der man - ganz offensichtlich gegen ihren Willen - einen rosa Hut auf den Kopf gebunden hat. Die Lehrerin empört sich: "Das waren bestimmt wieder einige der acht Lausbuben aus meiner Klasse!" 4 Punkte
Im Dorf läuft ihr Simon über den Weg, von dem sie erfährt: "Wenn Detlev an der Aktion beteiligt war, dann auch Rolf!" Als sie gerade den Laden betreten will, sieht sie Michel, der beteuert: "Wenn Friedl mitgemacht hat, dann hat Detlev nichts mit der Sache zu tun." Im Laden trifft die Lehrerin Detlev, welcher bekundet: "Das hat Simon angezettelt." Auf dem Heimweg begegnet sie schließlich Tobias und erfährt von diesem: "Klaus hat nichts mit der Sache zu tun!"
Am nächsten Morgen, vor dem Unterricht, begegnet die Lehrerin auf dem Schulhof Friedl, der sagt: "Wenn Tobias unschuldig ist, dann war Michel daran beteiligt!" In der großen Pause nimmt sie sich der Reihe nach Klaus und Rolf vor.
Klaus: "Wenn Rolf dabei war, dann auch Simon!"
Rolf: "Jürgen war's!"
Fehlt nur noch Jürgen: "Klaus ist einer von denen, die der Katze den Hut aufgebunden haben."

Die Schuldigen haben natürlich gelogen, die anderen nicht. Ermitteln Sie unter der Voraussetzung, dass die Lehrerin mit ihrer Vermutung recht hat, die schuldigen Lausbuben.

Aufgabe 7 (Zusatzaufgabe): Dies ist ein A4-Blatt. Es ist offenbar etwas höher als breit. Aber wie ist das Verhältnis von Höhe und Breite genau, und warum ist das so? 2 Punkte