**Prüfungsfragen Analysis I, WS 2017/2018**

1. Was versteht man unter einer geordneten Menge $(M, <)$ ? Wann sagt man, dass eine solche Menge die Supremumseigenschaft hat? (Def. 1.6 und Def. 1.8) Besitzt $\mathbb{Q}$ die Supremumseigenschaft? Wie folgt aus der Supremumseigenschaft der Menge der reellen Zahlen das Achimedes'sche Prinzip? (Satz 1.12)

2. Beweisen Sie die Dichtheit der Menge der reellen Zahlen. (Satz 1.17) Zeigen Sie, dass jede positive reelle Zahl genau eine positive $n$-te Wurzel besitzt, $n \in \mathbb{N}$ . (Satz 1.18) Wie kann man $x^p$ für $x \in \mathbb{R}_+$ und $p \in \mathbb{Q}$ definieren?

3. Zeigen Sie, dass die Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen die Wohlordnungseigenschaft besitzt. (Satz 1.15) Wie ergibt sich aus dieser Tatsache das Beweisprinzip der vollständigen Induktion? (Satz 1.20 und Folg. 1.21) Beweisen Sie die Bernoulli'sche Ungleichung. (Beispiel 1.22)

4. Beschreiben Sie die Menge der komplexen Zahlen mit den Operationen der Addition und der Multiplikation. Was versteht man unter der konjugiert komplexen Zahl, dem Betrag einer komplexen Zahl und der Dreiecksungleichung für komplexe Zahlen? Beweisen Sie die Formel von Moivre (1.15).

5. Was besagt die Schwarz'sche Ungleichung? (Bsp. 1.32) Zeigen Sie, dass für $n \in \mathbb{N}$ die Gleichung $z^n = 1$ genau $n$ komplexe Lösungen besitzt. (Bsp. 1.33) Beweisen Sie die binomische Formel (1.20).

6. Erklären Sie die Begriffe Abbildung, Bild, Urbild, Bild einer Menge, Urbild einer Menge, Graph einer Abbildung. Wann nennt man eine Abbildung surjektiv, injektiv, bijektiv? Wann existiert zu einer Abbildung die Umkehrabbildung? (Satz 2.4 mit Beweis)

7. Wann nennt man zwei Mengen gleichmächtig? Erläutern Sie die Begriffe endlich, unendlich, abzählbar, überabzählbar, höchstens abzählbar. Geben Sie Beispiele an. Zeigen Sie, dass jede unendliche Teilmenge einer abzählbaren Menge abzählbar ist. (Satz 2.9)

8. Beweisen Sie, dass die abzählbare Vereinigung abzählbarer Mengen und das Kreuzprodukt zweier abzählbarer Mengen abzählbar sind. (Satz 2.10 und Folg. 2.12) Zeigen Sie, dass die Menge der reellen Zahlen überabzählbar ist. (Satz 2.15 und Folg. 2.16)

9. Definieren Sie die Begriffe metrischer Raum, Berührungspunkt, Häufungspunkt, isolierter Punkt, innerer Punkt. Zeigen Sie, dass eine Teilmenge eines metrischen Raumes genau dann offen ist, wenn ihr Komplement abgeschlossen ist. (Satz 2.23,(c))

10. Ist die Menge der Häufungspunkte einer Menge stets abgeschlossen? Begründen Sie Ihre Antwort. (Satz 2.23,(b)) Was können Sie über die Vereinigung und den Durchschnitt offener bzw. abgeschlossener Mengen aussagen? (Satz 2.23,(d),(e) mit Beweis)

11. Zeigen Sie, dass jede Intervallschachtelung in der Menge der reellen Zahlen wenigstens eine reelle Zahl einfängt. (Bsp. 2.29) Wann nennt man eine Teilmenge eines metrischen Raumes kompakt? Warum ist jedes abgeschlossene Intervall $[a, b] \subset \mathbb{R}$ kompakt im metrischen Raum $\mathbb{R}$ ? (Beispiel 2.32)

12. Welche Eigenschaften kompakter Mengen kennen Sie? (Sätze 2.33, 2.34, 2.35, davon zwei mit Beweis) Wie kann man die kompakten Teilmengen von $\mathbb{R}$ charakterisieren? (Satz 2.36 mit Beweis)

13. Wann nennt man eine Teilmenge eines metrischen Raumes zusammenhängend? Charakterisieren Sie die zusammenhängenden Teilmengen von $\mathbb{R}$. (Satz 2.38 mit Beweis) Geben Sie Beispiele an.

14. Definieren Sie die Begriffe Stetigkeit und gleichmäßige Stetigkeit für Abbildungen zwischen metrischen Räumen. Wie kann man stetige Abbildungen mit Hilfe des Urbildbegriffes charakterisieren? (Satz 2.44 mit Beweis)

15. Diskutieren Sie die Eigenschaften konvergenter Punktfolgen (Satz 3.3,(a) mit Beweis) Wie kann man kompakte Mengen mittels der Begriffe konvergente Punktfolge und endliches $\varepsilon$-Netz charakterisieren? (Satz 3.3,(b),(c) mit Beweis und Satz 3.10, davon (b) mit Beweis)

16. Diskutieren Sie die Begriffe Cauchy-Folge und vollständiger metrischer Raum sowie deren grundlegende Eigenschaften. (Folg. 3.5 und 3.7 mit Beweis)

17. Wie verhalten sich Grenzwerte von Zahlenfolgen gegenüber den Grundrechenarten in $\mathbb{C}$ und gegenüber der Ordnungsrelation in $\mathbb{R}$? (Folg. 3.11 mit Beweis und Satz 3.12 mit Beweis)

18. Beweisen Sie den Satz über monotone Zahlenfolgen, und verwenden Sie diesen zur Definition der Eulerschen Zahl $e$. (Satz 3.15 und Bsp. 3.17)

19. Beweisen Sie, dass jede reelle Zahlenfolge einen größten und einen kleinsten partiellen Grenzwert besitzt. (Satz 3.18) Zeigen Sie, dass $\lim \sqrt[n]{n} = 1$ gilt.

20. Erläutern Sie weitere Eigenschaften stetiger Funktionen. (Satz 3.22) Geben Sie den Zusammenhang zwischen dem Grenzwertbegriff und dem Stetigkeitsbegriff für Abbildungen zwischen metrischen Räumen an. (Folg. 3.26 und Folg. 3.25)

21. Beweisen Sie den Zwischenwertsatz für stetige Funktionen. (Satz 3.27) Wie kann man monotone stetige Funktionen charakterisieren? (Satz 3.28) Wie ergibt sich daraus die Stetigkeit der Exponential-, Potenz- und Logarithmusfunktionen? (Folg. 3.30)

22. Was versteht man unter einer konvergenten Zahlenreihe? Geben Sie einfache Konvergenzkriterien für Reihen an, und begründen Sie Ihre Aussagen. (Folg. 3.39) Diskutieren Sie das Konvergenzverhalten der harmonischen Reihe. (Bsp. 3.41)

23. Beweisen Sie das Leibnizkriterium für alternierende Reihen. (Satz 3.43) Was besagt der Verdichtungssatz? Wenden Sie diesen auf die verallgemeinerten harmonischen Reihen an. (Satz 3.46 und Bsp. 3.47)

24. Erläutern Sie das Wurzel- und das Quotientenkriterium für Zahlenreihen (Sätze 3.48 und 3.49, einen davon mit Beweis) Was kann man über die Konvergenz von Potenzreihen aussagen? Begründen Sie Ihre Aussage. (Bsp. 3.53)

25. Was versteht man unter der Umordnung einer Reihe? Formulieren und beweisen Sie den Satz über die Umordnung absolut konvergenter Reihen. Was besagt der Riemannsche Umordnungssatz? (Sätze 3.57, 3.59) Was versteht man unter dem Cauchy-Produkt von Reihen? (Satz 3.60)

26. Erklären Sie die Begriffe Differenzierbarkeit und Ableitung. Welcher Zusammenhang besteht zwischen Differenzierbarkeit und Stetigkeit? Welche Differentiationsregeln kennen Sie? Beweisen Sie die Produkt- und die Kettenregel. (Folgerungen 4.6, 4.7)

Folgende Übungsaufgaben sind für die Prüfung relevant:

2. Übungsblatt: A5; A6, a,c,d,e; A7; A9
3. Übungsblatt: A4; A5; A6; A7
4. Übungsblatt: A6
5. Übungsblatt: A1; A3; A4; A5; A8
6. Übungsblatt: A2
7. Übungsblatt: A1; A5; A7; A8
8. Übungsblatt: A1; A2; A3