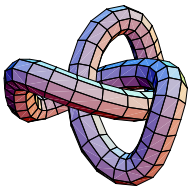

Fakultät für Mathematik

Prof. Dr. Peter Junghanns

TECHNISCHE UNIVERSITÄT
CHEMNITZ

Chemnitz, 16. Juli 2018

Probeklausur Analysis II

- **Arbeitszeit**: 120 min
- **Hilfsmittel**: Formelsammlung ohne durchgerechnete Beispiele
- Der Lösungsweg sollte klar erkennbar sein. Alle Aussagen sind zu begründen!

Viel Erfolg!

1. Überprüfen Sie folgende Reihen auf Konvergenz:

   (a) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(5^{\frac{1}{n}}-1\right)$, (b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^5}{3^n}$, (c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^4+3\,n^2-5}{100\,n^4+7}$.

2. Die Funktion $f:(a,b]\longrightarrow\mathbb{C}$ sei stetig. Es existiere der Grenzwert $\lim\limits_{x\to a+0}f(x)=A\in\mathbb{C}$. Ist $f:(a,b]\longrightarrow\mathbb{C}$ gleichmäßig stetig?

3. Entwickeln Sie die Funktion $f(x)=\dfrac{6}{x^2-9}$ in eine Potenzreihe um den Entwicklungspunkt $x_0=1$ und bestimmen Sie deren Konvergenzradius.

4. Für welche $x\in\mathbb{R}$ konvergiert die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(n+2)x^n}{2^n}$?

5. Berechnen Sie

   (a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,\sqrt{1-\sin x}\,dx$,

   (b) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_n^{2n}\dfrac{\sin x}{x^2}dx$,

   (c) $\int_2^{\infty}\dfrac{x-1}{x(x+1)^2}dx$.

Bitte wenden!

6. Bestimmen Sie den kleinsten und größten Wert der Funktion

$$f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto xy - 2x + 4y + 3,$$

wobei $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1,\ 0 < y < 2\}$ sei.

7. (a) Was versteht man unter punktweiser bzw. gleichmäßiger Konvergenz von Funktionenreihen? Welche Beziehungen bestehen zwischen diesen beiden Begriffen?

   (b) Ermitteln Sie die Fourierreihe der 2π-periodischen Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, für die gilt

$$f(x) = \begin{cases} 0 & : x \in [-\pi, 0) \ , \\ x & : x \in [0, \pi) \ . \end{cases}$$

   (c) Geben Sie die Summe dieser Reihe in Abhängigkeit von $x \in [-\pi, \pi]$ an. Auf welchen Intervallen $[a, b] \subset [-\pi, \pi]$ konvergiert die diese Reihe gleichmäßig?

(Z) Untersuchen Sie, für welche $\alpha > 0$ die Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2 \alpha^n}{(2n)!}$ konvergiert.

Punktbewertung der einzelnen Aufgaben:

1			**2**	**3**	**4**	**5**			**6**	**7**			**Z**
a	b	c				a	b	c		a	b	c	
2	2	2	3	4	3	2	2	4	5	2	5	2	3

Gesamtpunktzahl: 38+3Z

Note	1,0	1,3	1,7	2,0	2,3	2,7	3,0	3,3	3,7	4,0
Punkte	36	35	32	30	28	25	23	21	18	15