Thema: Bachelor- oder Masterarbeit
Lernen von nicht-stationären Kernel-Funktionen

Nicht-stationäre Kernel-Funktionen bieten eine flexible Möglichkeit, komplexe Datenstrukturen zu modellieren, bei denen sich das Verhalten lokal verändert. In diesem Computerpraktikum sollen solche Kernel-Funktionen konstruiert, analysiert und praktisch eingesetzt werden. Ziel ist es, die Vorteile nicht-stationärer gegenüber translationinvarianten Kernel-Funktionen anhand einfacher numerischer Experimente zu verstehen.

In vielen Anwendungsfeldern – etwa in der Modellierung physikalischer Systeme, der Bildverarbeitung oder im maschinellen Lernen – besteht das Ziel darin, eine Funktion $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ aus endlich vielen Messungen oder Beobachtungen zu rekonstruieren. Insbesondere nicht-stationäre Kernel-Funktionen sind für die Funktionsapproximation interessant, wenn die zu approximierende Funktion stark ortsabhängiges Verhalten zeigt, z.B. schnelle Änderungen in bestimmten Bereichen und glatte Strukturen in anderen. In solchen Fällen ermöglichen nicht-stationäre Kernel-Funktionen eine adaptive Approximation, bei der sich der Einflussbereich der Kernel-Funktion an die lokale Struktur der Daten anpasst.

Die Idee von random Fourier features (RFF) ist es, eine Kernel-Funktion κ zu approximieren durch

$$\kappa(x, y) = \int_{\mathbb{R}} \varrho(\omega) \mathrm{e}^{2\pi\,\mathrm{i}\omega(x-y)}\, \mathrm{d}\omega \approx \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}\omega_k (x-y)\rangle}.$$

Dabei werden Frequenzen $\{\boldsymbol{\omega}_k\}_{k=1}^N$ von einer Dichte ϱ gezogen, was eine populäre Technik ist, um eine Kernel-Funktion zu approximieren mit einer randomisiereten Basis. Das funktioniert gut für stationäre Kernel-Funktionen κ.

Eine nicht-stationäre Kernel-Funktion $\kappa(x, y)$ kann charakterisiert werden durch die spektrale Dichte $\mu(s, t)$, wobei die beiden Funktionen verknüft sind durch

$$\kappa(x, y) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}(xs-yt)} \mu(s, t)\, \mathrm{d}t\, \mathrm{d}s. \tag{1}$$

Um RFF-Algorithmen auch für nicht-stationäre Kerne benutzen zu können, muss eine Fenster-Funktion φ gewählt werden, sodass die Kernel-Funktion κ geschrieben wird als

$$\kappa(x, y) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \varphi(x - \lambda)\varphi(y - \lambda) \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}\omega(x-y)} \varrho(\omega, \lambda)\, \mathrm{d}\lambda\ \mathrm{d}\omega, \tag{2}$$

Das Ziel dieser Arbeit ist es, die folgenden Aufgaben zu bearbeiten:

- Machen Sie sich anhand von Beispielen aus [1] vertraut mit der spektralen Dichte μ einer nicht-sationären Kernel-Funktion.
- Untersuchen Sie den Zusammenhang zwischen der spektralen Dichte μ einer Kernel-Funktion in (1) and der Dichte ϱ bzw. der Fenster-Funktion φ in (2).

- Erweitern Sie die Idee von RFF für ein-dimensionale Funktionen für nicht-stationäre Kernel-Funktionen κ mithilfe von (2).

Betreuung

Dr. Laura Weidensager
laura.weidensager@math.tu-chemnitz.de
Reichenhainer Str. 39, Zimmer 709

References

[1] S. Remes, M. Heinonen, and S. Kaski. Non-Stationary Spectral Kernels *Adv. Neural. Inf. Process. Syst.*, 30, 2017