Mathematik für Physik und Computational Science, 31. Übung

WS 2016/17 https://www.tu-chemnitz.de/~lahol/lehre/phcsb15

---

1. Man entwickle folgende Funktionen in $z_0 \in \mathbb{C}$ in eine Potenzreihe und gebe das Konvergenzgebiet an:

   (a) $f(z) = \mathrm{e}^z,\ z_0 = \pi \mathbf{i}$,

   (b) $f(z) = \dfrac{1}{z-\mathbf{i}},\ z_0 = 0$,

   (c) $f(z) = \dfrac{1}{(z-\mathbf{i})^3},\ z_0 = -\mathbf{i}$.

2. Für welche $z \in \mathbb{C}$ konvergieren die folgenden Reihen? Man gebe im Falle der Konvergenz die Summe der Reihe an!

   (a) $1 + (2z+1) + (2z+1)^2 + \ldots$ (b) $1 + 2\dfrac{z-1}{z+1} + 2\left(\dfrac{z-1}{z+1}\right)^2 + \ldots$

3. Zeigen Sie, dass für die Funktionen

$$\sinh z := \frac{\mathrm{e}^z - \mathrm{e}^{-z}}{2}, \qquad \cosh z := \frac{\mathrm{e}^z + \mathrm{e}^{-z}}{2}$$

   die Darstellungen

$$\sinh z = -\mathbf{i} \sin \mathbf{i} z, \quad \text{bzw.} \quad \cosh z = \cos \mathbf{i} z$$

   gelten.

4. Die Reihendarstellungen von e^z, $\cos z$, $\sin z$ sowie das Potenzgesetz $\mathrm{e}^{z_1+z_2} = \mathrm{e}^{z_1}\mathrm{e}^{z_2}$ werden als bekannt vorausgesetzt.

   Man zeige, dass $\mathrm{e}^{\mathbf{i}z} = \cos z + \mathbf{i} \sin z$ für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt und leite die folgenden Formeln her:

   (a) $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$ (b) $\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2$

   Zusatz: Zeigen Sie, dass $f(z) = \sin z$ und $g(z) = \cos z$ nur reelle Nullstellen haben.

5. Gibt es eine in einer Umgebung des Nullpunktes analytische Funktion, die in den Punkten $z_n = \frac{1}{n}$ die folgenden Werte annimmt? (Hinweis: Identitätssatz)

   (a) $0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{4}, 0, \frac{1}{6}, \ldots$ (b) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots$ (c) $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \ldots$ (d) $1, -\frac{1}{4}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{16}, \ldots$