Mathematik für Physik und Computational Science, 28. Übung

WS 2016/17 https://www.tu-chemnitz.de/~lahol/lehre/phcsb15

---

1. Lösen Sie die folgenden Anfangswertprobleme:

   (a) $xy' + 2y - xy^2 = 0,\ y(1) = 1,$ (b) $y' - \frac{3x^2+1}{x(x^2+1)}y = -\frac{y^2}{\sqrt{x^2+1}},\ y(-1) = -1,$

   (c) **(HA)** $xy' - y = y^2 \cos x,\ y(\pi) = \pi,$ (d) $y' + \frac{1}{x}y = xy^2,\ y(1) = 1.$

2. Lösen Sie die folgenden Riccati-Differentialgleichungen

   (a) $y' = y^2 - \frac{2}{x^2},\ y(1) = -2,$ (b) $x(x-1)y' - (1+2x)y + y^2 + 2x = 0,\ y\left(\frac{1}{2}\right) = 0.$

3. Zeigen Sie, dass durch

$$f(x) = \frac{x+2}{x+1}$$

   eine kontrahierende Selbstabbildung $f : [1,2] \to [1,2]$ definiert wird und bestimmen Sie den Fixpunkt.

4. **(HA)** Zeigen Sie, dass die Gleichung

$$2x - \sin x = \frac{1}{2}$$

   genau eine Lösung auf $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ besitzt. Bestimmen Sie diese auf zwei Nachkommastellen genau.

5. Bestimmen Sie die Lösungen der folgenden Anfangswerprobleme mithilfe des Iterationsverfahrens von Picard-Lindelöf.

   (a) $y' = xy$ mit Anfangsbedingung $y(0) = 1$,

   (b) **(HA)** $y'' + y = 0$ mit Anfangsbedingung $y(0) = 0$ sowie $y'(0) = 1$.

   Hinweis: Formen Sie die Differentialgleichung in ein System von Differentialgleichungen erster Ordnung um. Wenden Sie anschließend das Iterationsverfahren an.