Mathematik für Physik und Computational Science, 26. Übung

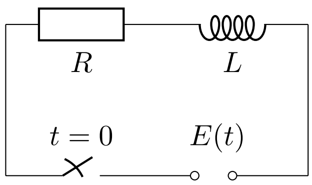
WS 2016/17 https://www.tu-chemnitz.de/~lahol/lehre/phcsb15

---

1. Lösen Sie folgende lineare Differentialgleichungen:
   (a) $y' = 2xy - x^3 + x$,
   (b) $xy' - 2y = 2x^4$,
   (c) **(HA)** $y' = (\sin x)(1 - y)$,
   (d) $y' + y \sin x = \sin x \cos x$,
   (e) $y' = \frac{-x}{1+x^2} y + \frac{1}{x(1+x^2)} \quad (x > 0)$, wenn zwei spezielle Lösungen gegeben sind
   $y_1 = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \log\left(\frac{-1+\sqrt{1+x^2}}{x}\right)$, $y_2 = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\left(-1 + \log\left(\frac{-1+\sqrt{1+x^2}}{x}\right)\right)$.
   (HA) Überprüfen Sie, dass y_1 die Differentialgleichung erfüllt.
   (f) **(HA)** $y' + y \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x} = \varphi(x) \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x} \quad$ ($\varphi(x)$ sei gegebene differenzierbare Funktion.)

2. Gegeben seinen zwei spezielle Lösungen y_1 und y_2 einer linearen Differentialgleichung 1. Ordnung. Bestimme aus ihnen die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung ($y_1 \neq y_2$). (Wenden Sie dies auf 7 (e) an!)

3. Die Stromstärke J in einem Stromkreis mit dem Ohmschen Widerstand R, der Selbstinduktion L und der elektromotorischen Kraft E genügt der Differentialgleichung $L \frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}t} + RJ = E(t)$ (R und L konstant). Berechne $J(t)$, wenn zur Zeit $t = 0$ der Stromkreis geschlossen wird!
   (a) $E(t) = E_0$ (b) **(HA)** $E(t) = kt$
   (c) $E(t)$ beliebig.



4. **(HA)** Eine Kugel der Masse m werde aus großer Höhe mit der Anfangsgeschwindigkeit v_0 auf die Erde geworfen. Nehmen Sie an, dass die einzigen Kräfte, die auf sie wirken, der Luftwiderstand proportional zu ihrer Geschwindigkeit und die Erdanziehungskraft sind. Bestimmen Sie die Geschwindigkeit als Funktion der Zeit!

5. **(HA)** Bestimmen Sie diejenige Lösung $y(t)$ der Differentialgleichung $y' + y \sin x = \sin^3 x$, für die $y(\frac{\pi}{2}) = 0$ ist.

6. Finde die Lösung der Gleichung $y' \sin 2x = 2(y + \cos x)$ die für $x \to \frac{\pi}{2}$ beschränkt bleibt.

7. Ein Käfer befindet sich zum Zeitpunkt $t = 0$ am unteren Ende eines Baumes der Länge ℓ_0. Dieser Baum wächst gleichmäßig mit der Geschwindigkeit v_2. Der Käfer beginnt nun mit konstanter Geschwindigkeit v_1 den Baum nach oben zu krabbeln. Erreicht der Käfer jemals die Spitze des Baumes?

8. **(HA)** Ein Kaugummi von einem Meter Länge ist mit einem Ende an einer Wand festgeklebt. Auf dem anderen Ende sitzt eine Schnecke mit Blick zur Wand. Zum Zeitpunkt $t = 0$ erfasst der Läufer Achilles dieses Ende und läuft mit der Geschwindigkeit $v_A = 10\frac{m}{s}$ von der Wand weg. Gleichzeitig beginnt die Schnecke mit $v_S = 1\frac{mm}{s}$ auf dem Kaugummi in Richtung Wand zu kriechen. Erreicht sie die Wand? Wenn ja, in welcher Zeit?